1510 AM 18,00

Dr Antonije R. Đorđević
Mr Gradimir N. Božilović
Dr Branislav M. Notaroš

ZBIRKA REŠENIH ISPITNIH ZADATAKA IZ OSNOVA ELEKTROTEHNIKE

II deo

Treće izdanje

Stalno magnetsko polje i elektromagnetska indukcija
Naizmenične struje

AKADEMSKA MISAO
Beograd, 2007

Antonije R. Đorđević, Gradimir N. Božilović, Branislav M. Notaroš

ZBIRKA REŠENIH ISPITNIH ZADATAKA IZ OSNOVA ELEKTROTEHNIKE - II DEO

TREĆE IZDANJE

Recenzenti
Akademik dr Jovan V. Surutka
Prof. dr Hildegard A. Božilović

Izdavač
AKADEMSKA MISAO
Bul. kralja Aleksandra 73, Beograd

Štampa
Planeta print, Beograd

Tiraž
500 primeraka

ISBN 978-86-7466-271-7

PREDGOVOR

Drugi deo "Zbirke rešenih ispitnih zadatka iz Osnova elektrotehnike" u svemu predstavlja nastavak prvoga dela Zbirke, objavljenog aprila 1997. godine. Ovaj, drugi, deo Zbirke obrađuje gradivo predviđeno za drugi semestar, iz Magnetizma i Naizmeničnih struja.

Autori se i ovom prilikom zahvaljuju recenzentima Zbirke, akademiku dr Jovanu Surutki i vanrednom profesoru dr Hildegard Božilović, drugim saradnicima u nastavi Osnova elektrotehnike, kao i pomagačima u pripremi rukopisa i slika, navedenim u Predgovoru prvoga dela Zbirke.

U Beogradu, oktobra 1997. godine — Autori

SADRŽAJ

3. STALNO MAGNETSKO POLJE I ELEKTROMAGNETSKA INDUKCIJA

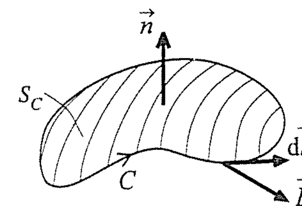
1. Napisati osnovne integralne jednačine za stalno magnetsko polje u vakuumu. (*P920627*)

REŠENJE:
Osnovne integralne jednačine za stalno magnetsko polje u vakuumu su:

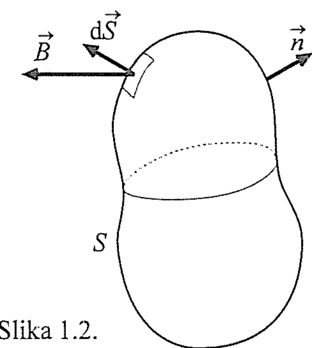
$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I_C \,, \tag{1.1}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \,, \tag{1.2}$$

gde je C proizvoljna kontura, skicirana na slici 1.1, $\boldsymbol{B}$ vektor magnetske indukcije, μ_0 permeabilnost vakuuma ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m), I_C jačina struje kroz proizvoljnu površ S_C oslonjenu na konturu C, pri čemu su orijentacije konture i površi vezane pravilom desne zavojnice, a S proizvoljna zatvorena površ, orijentisana upolje (slika 1.2). Jednačine (1.1) i (1.2) predstavljaju Amperov zakon i zakon o konzervaciji magnetskog fluksa, respektivno.



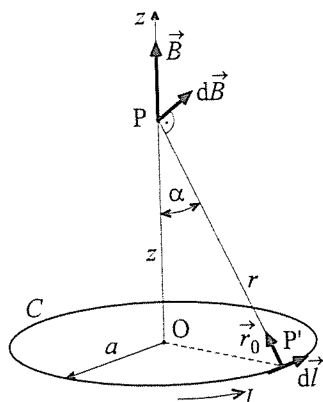
Slika 1.1.



Slika 1.2.

2. U kružnoj žičanoj konturi, poluprečnika a, postoji stalna struja jačine I. Sredina je vakuum. Izvesti izraz za vektor magnetske indukcije na osi konture normalnoj na ravan konture.

REŠENJE:



Slika 2.1.

Uočimo strujni element $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ u tački P' na konturi (slika 2.1). Vektor magnetske indukcije toga elementa u tački P na osi z iznosi

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}_0}{4\pi r^2} \tag{2.1}$$

(Bio–Savarov zakon), gde je $r = \sqrt{z^2 + a^2}$ (z je koordinata tačke P). Vektor rezultantne magnetske indukcije dobijamo kao

$$\boldsymbol{B} = \oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{B}\,. \tag{2.2}$$

Zbog simetrije, radijalna komponenta vektora $\boldsymbol{B}$ ne postoji, pa vektor $\boldsymbol{B}$ ima samo aksijalnu komponentu,

$$B = B_z = \oint_C \mathrm{d}B_z\,, \quad \mathrm{d}B_z = \mathrm{d}B \sin\alpha = \mathrm{d}B\frac{a}{r}\,. \tag{2.3}$$

Kako je $\mathrm{d}B = \mu_0 I\,\mathrm{d}l/(4\pi r^2)$, to je

$$B_z = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3}\oint_C \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3}\,, \tag{2.4}$$

odnosno

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2\,(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{k} = B_z(z)\boldsymbol{k}\,. \tag{2.5}$$

Preporučuje se čitaocu da nacrta funkciju $B_z(z)$, $-\infty < z < \infty$, pod pretpostavkom $I > 0$. Za koje z ta funkcija ima maksimum?

3. Napisati opšti oblik Bio–Savarovog zakona za magnetsku indukciju žičane konture sa stalnom strujom, u vakuumu. Polazeći od toga izraza izvesti uprošćeni izraz za slučaj kada su kontura i tačka u kojoj se računa magnetska indukcija koplanarni. (*P960904*)

REŠENJE:
Prema Bio–Savarovom zakonu, vektor magnetske indukcije $\boldsymbol{B}$ proizvoljne žičane konture C sa stalnom strujom jačine I dat je izrazom

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \frac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}_0}{r^2}\,, \tag{3.1}$$

gde je $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ elementarni vektor duž konture (čiji je početak u tački P'), $\boldsymbol{r}$ poteg tačke P u kojoj se računa magnetska indukcija u odnosu na strujni element $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$, $r = |\boldsymbol{r}|$ i $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}/r$.

Izraz (3.1) se može uprostiti ako je kontura C planarna (ako leži u jednoj ravni) i ako je tačka u kojoj se računa magnetska indukcija u toj istoj ravni. Tada je vektor $\boldsymbol{B}$ normalan na ravan konture, a u odnosu na referentni smer koji je po pravilu desne zavojnice vezan sa referentnim smerom struje u konturi algebarski intenzitet ovog vektora je

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \frac{I|\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}_0|}{r^2}\,. \tag{3.2}$$

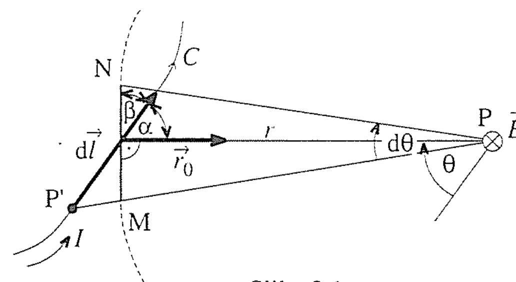
Kako je (slika 3.1)

$$|\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}_0| = \mathrm{d}l \sin\alpha = \mathrm{d}l\cos\beta = \overline{\mathrm{MN}} = r\,\mathrm{d}\theta\,, \tag{3.3}$$

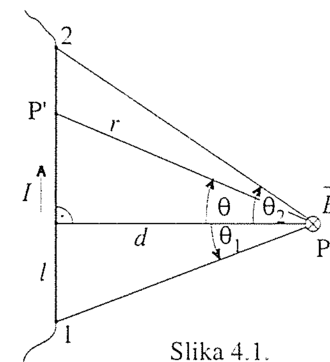
to je

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \frac{I\,\mathrm{d}\theta}{r}\,, \tag{3.4}$$

gde je θ ugao između potega r i proizvoljne referentne poluose u ravni konture. Referentni smer za računanje ugla θ poklapa se sa referentnim smerom struje u konturi gledano iz tačke P.



Slika 3.1.



Slika 4.1.

4. Posmatra se pravolinijski provodnik dužine l koji predstavlja deo žičane konture sa stalnom strujom jačine I. Sredina je vazduh. Odrediti izraz za magnetsku indukciju pravolinijskog provodnika u proizvoljnoj tački prostora.

REŠENJE:
Pravolinijski provodnik i tačka P u kojoj treba odrediti magnetsku indukciju uvek definišu jednu ravan, pa se možemo koristiti uprošćenim oblikom Bio–Savarovog zakona izvedenim u prethodnome zadatku. Prema slici 4.1, geometriju problema možemo definisati sa tri podatka: uglovima θ_1 i θ_2 i (normalnim) odstojanjem

tačke od provodnika d. (Za položaj tačke P usvojen na slici 4.1 je $\theta_1 < 0$ i $\theta_2 > 0$.) Vektor magnetske indukcije je normalan na ravan crteža. Za algebarski intenzitet ovog vektora u odnosu na referentni smer prikazan na slici 4.1 imamo

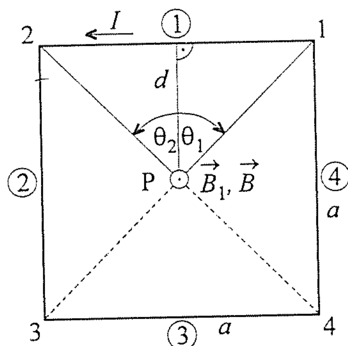
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_l \frac{I\,\mathrm{d}\theta}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi d}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\ , \tag{4.1}$$

pri čemu je upotrebljena trigonometrijska relacija $\cos\theta = d/r$.

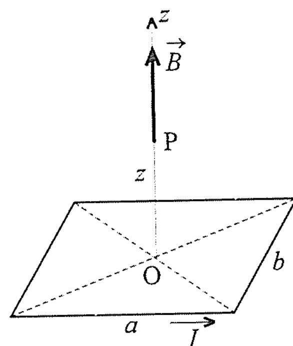
5. U kvadratnoj konturi, dužine stranice a, koja se nalazi u vakuumu, postoji stalna struja jačine I. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u centru konture. (*P950614*)

REŠENJE:
Magnetsku indukciju (B_1) jedne stranice kvadratne konture računamo na osnovu obrasca (4.1), pri čemu je $d = a/2$, $\theta_1 = -\pi/4$ i $\theta_2 = \pi/4$ (slika 5.1). Prema principu superpozicije, algebarski intenzitet vektora rezultantne magnetske indukcije u centru konture (u odnosu na referentni smer sa slike 5.1) je

$$B = 4B_1 = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}\ . \tag{5.1}$$



Slika 5.1.



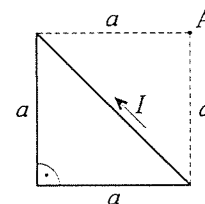
Slika 6.1.

6. U pravougaonoj konturi, dužina stranica a i b, postoji stalna struja jačine I. Kontura se nalazi u vakuumu. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u proizvoljnoj tački na pravoj koja je normalna na ravan konture i prolazi kroz centar konture. (*Z920516*)

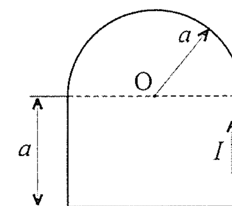
REZULTAT:
Prema slici 6.1, vektor magnetske indukcije na z-osi je $\boldsymbol{B} = 2\mu_0 abI[1/(4z^2 + a^2) + 1/(4z^2 + b^2)]\,\boldsymbol{k}/\left(\pi\sqrt{4z^2 + a^2 + b^2}\right)$.

7. Provodna kontura, prikazana na slici 7.1, ima oblik jednakokrakog pravouglog trougla, dužine katete a. Kontura se nalazi u vakuumu, a u njoj postoji stalna struja jačine I. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u tački A. (Tačka A se nalazi u ravni crteža.) (*Z910518*)

REZULTAT:
Vektor magnetske indukcije je normalan na ravan crteža, a u odnosu na referentni smer vezan pravilom desne zavojnice sa referentnim smerom struje duž hipotenuze trougla algebarski intenzitet ovoga vektora je $B = \mu_0 I(1 - \sqrt{2}/2)/(2\pi a)$.



Slika 7.1.



Slika 8.1.

8. Provodna kontura, prikazana na slici 8.1, sastoji se od jednog polukružnog dela, poluprečnika a, i tri pravolinijska dela, dužina a, $2a$ i a, respektivno. U konturi postoji stalna struja jačine I, a sredina je vakuum. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u tački O, koja je centar polukruga. (*Z900512*)

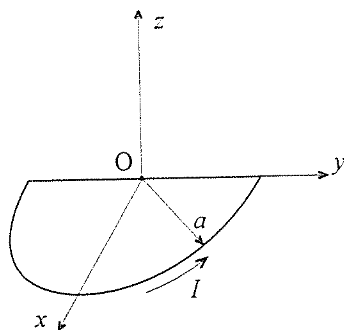
REŠENJE:
Vektor $\boldsymbol{B}$ je normalan na ravan crteža. Neka je referentni smer toga vektora vezan sa referentnim smerom struje u konturi pravilom desne zavojnice. Magnetska indukcija polukružnog dela je, na osnovu obrasca (3.4),

$$B_\mathrm{k} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^\pi \frac{I\,\mathrm{d}\theta}{a} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I}{4a}\ . \tag{8.1}$$

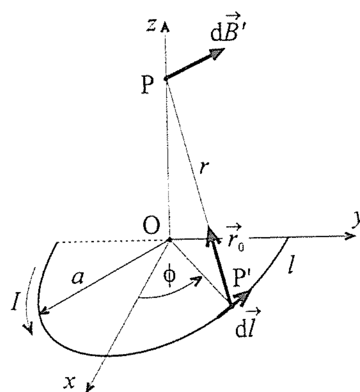
Kako zbir magnetskih indukcija pravolinijskih delova konture iznosi $B_\mathrm{p} = \mu_0 I\sqrt{2}/(2\pi a)$, to je ukupna magnetska indukcija u tački O

$$B = B_\mathrm{k} + B_\mathrm{p} = \frac{\mu_0 I(\pi + 2\sqrt{2})}{4\pi a}\ . \tag{8.2}$$

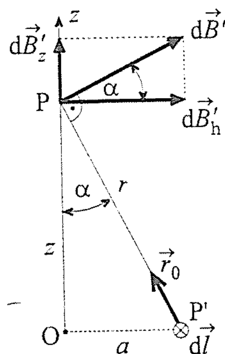
9. Žičana kontura, sa stalnom strujom jačine I, sastoji se od polukružnog dela (poluprečnika a) i pravolinijskog dela (dužine $2a$). Kontura se nalazi u vazduhu i leži u Oxy ravni Dekartovog koordinatnog sistema, kao što je prikazano na slici 9.1. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u proizvoljnoj tački na z-osi. (*Z960404*)



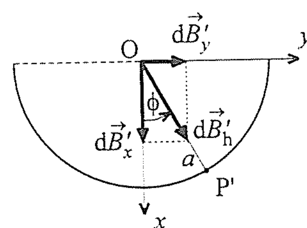
Slika 9.1.



Slika 9.2.



Slika 9.3.



Slika 9.4.

REŠENJE:
Označimo sa $\mathrm{d}\boldsymbol{B}'$ vektor magnetske indukcije na z-osi usled strujnog elementa $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ koji pripada polukružnom delu konture (slika 9.2). Taj vektor je dat izrazom (2.1), a potrebno ga je razložiti na pogodne komponente. Razložićemo ga, najpre, na horizontalnu i vertikalnu komponentu (slika 9.3),

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}' = \mathrm{d}\boldsymbol{B}'_{\mathrm{h}} + \mathrm{d}B'_z\boldsymbol{k}\,, \quad \mathrm{d}B'_{\mathrm{h}} = \mathrm{d}B'\cos\alpha\,, \quad \cos\alpha = \frac{z}{r}\,,$$

$$\mathrm{d}B'_z = \mathrm{d}B'\sin\alpha\,, \quad \sin\alpha = \frac{a}{r}\,, \tag{9.1}$$

gde je $\mathrm{d}B' = \mu_0 I\,\mathrm{d}l/(4\pi r^2)$. Pošto se pravac vektora $\mathrm{d}\boldsymbol{B}'_{\mathrm{h}}$ menja tokom integracije (dok tačka P' obilazi polukrug), potrebno je njegovo dalje razlaganje (slika 9.4),

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}'_{\mathrm{h}} = \mathrm{d}B'_x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}B'_y\boldsymbol{j}\,, \quad \mathrm{d}B'_x = \mathrm{d}B'_{\mathrm{h}}\cos\phi\,, \quad \mathrm{d}B'_y = \mathrm{d}B'_{\mathrm{h}}\sin\phi \tag{9.2}$$

(ϕ je cirkularni ugao, $-\pi/2 \le \phi \le \pi/2$). Na osnovu gornjih izraza i veze $\mathrm{d}l = a\,\mathrm{d}\phi$,

imamo

$$B'_x = \int_l \mathrm{d}B'_x = \frac{\mu_0 I a z}{4\pi r^3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{\mu_0 I a z}{2\pi r^3}\,, \tag{9.3}$$

$$B'_y = \int_l \mathrm{d}B'_y = \frac{\mu_0 I a z}{4\pi r^3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi = 0\,, \tag{9.4}$$

$$B'_z = \int_l \mathrm{d}B'_z = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi r^3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\phi = \frac{\mu_0 I a^2}{4 r^3}\,. \tag{9.5}$$

Stoga je vektor magnetske indukcije polukružnog dela konture

$$\boldsymbol{B}' = \frac{\mu_0 I a}{2 r^3}\left(\frac{z}{\pi}\,\boldsymbol{i} + \frac{a}{2}\,\boldsymbol{k}\right)\,. \tag{9.6}$$

Vektor magnetske indukcije pravolinijskog dela konture u tački P na z-osi je, na osnovu obrasca (4.1),

$$\boldsymbol{B}'' = \frac{\mu_0 I}{4\pi z}2\sin\alpha(-\boldsymbol{i}) = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi z r}\,\boldsymbol{i}\,. \tag{9.7}$$

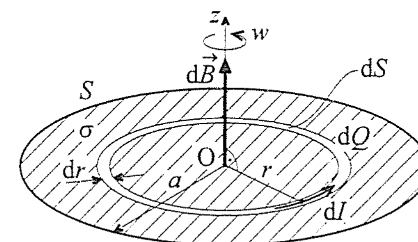
Konačno, traženi vektor magnetske indukcije iznosi

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}' + \boldsymbol{B}'' = \frac{\mu_0 I a^2}{2 r^3}\left(-\frac{a}{\pi z}\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{k}\right)\,, \qquad r = \sqrt{z^2 + a^2}\,. \tag{9.8}$$

10. Veoma tanak kružni disk, poluprečnika a, ravnomerno je naelektrisan naelektrisanjem površinske gustine σ. Disk se obrće u vakuumu stalnom ugaonom brzinom w oko svoje ose normalne na ravan diska. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u centru diska, smatrajući da se raspodela naelektrisanja diska pri obrtanju ne menja. (*P940130*)

REŠENJE:
Izdelićemo disk na tanke prstenove, poluprečnika r i širine $\mathrm{d}r$ (slika 10.1). Svaki takav prsten tretiraćemo kao tanak kružni provodnik, poluprečnika r, sa stalnom strujom jačine

$$\mathrm{d}I = \frac{\mathrm{d}Q}{T}\,. \tag{10.1}$$



Slika 10.1.

U gornjoj relaciji, $\mathrm{d}Q$ je naelektrisanje prstena, koje iznosi

$$\mathrm{d}Q = \sigma\,\mathrm{d}S\,, \quad \mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}r\,, \tag{10.2}$$

gde je dS površina prstena, a T period obrtanja prstena ($T = 2\pi/\omega$). Vektor magnetske indukcije u centru diska usled struje prstena je [videti obrazac (2.5)]

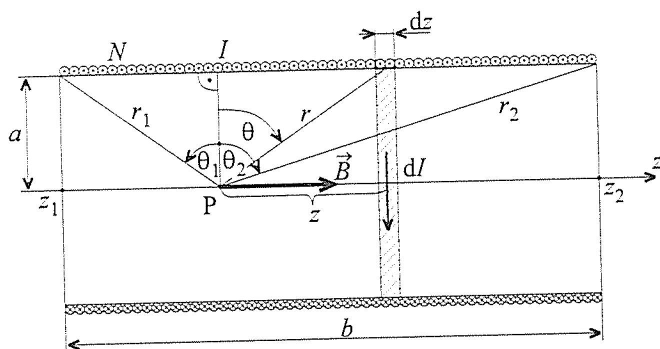
$$dB = \frac{\mu_0 \, dI}{2r} k = \frac{\mu_0 \sigma \omega \, dr}{2} k . \tag{10.3}$$

pa integracijom po površi diska, S, za vektor ukupne magnetske indukcije dobijamo

$$B = \int_S dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} k \int_0^a dr = \frac{\mu_0 \sigma \omega a}{2} k . \tag{10.4}$$

Preporučuje se čitaocu da, kao vežbu, odredi izraz za vektor magnetske indukcije u proizvoljnoj tački na osi obrtanja diska.

11. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije na osi kratkog solenoida, kružnog poprečnog preseka poluprečnika a, dužine b, sa N ravnomerno i gusto namotanih zavojaka u jednom sloju, u kojima postoji stalna struja jačine I. Sredina je vazduh.



Slika 11.1.

REŠENJE:
Podužna gustina zavojaka solenoida je $N' = N/b$. Na dužini dz solenoida ima $N' dz$ zavojaka, koje možemo zameniti jednim zavojkom sa strujom jačine

$$dI = \frac{NI \, dz}{b} \tag{11.1}$$

(slika 11.1). Magnetska indukcija toga zavojka na osi solenoida data je izrazom (2.5). Na osnovu principa superpozicije, vektor rezultantne magnetske indukcije u tački P (čiji je položaj na osi solenoida definisan uglovima θ_1 i θ_2) je

$$B = \frac{\mu_0 N I a^2}{2b} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{r^3} k , \qquad r = \sqrt{z^2 + a^2} . \tag{11.2}$$

Između linijske koordinate z i ugaone koordinate θ tačke P postoji diferencijalna veza [videti (3.3)]

$$dz \cos\theta = r \, d\theta . \tag{11.3}$$

Kako je $\cos\theta = a/r$, to je

$$\frac{a^2 \, dz}{r^3} = \cos\theta \, d\theta , \tag{11.4}$$

čime se integral (11.2) svodi na jednostavan oblik

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2b} \int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta \, d\theta \, k = \frac{\mu_0 N I}{2b} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \, k . \tag{11.5}$$

U slučaju beskonačno dugačkog solenoida je $\theta_1 = -\pi/2$ i $\theta_2 = \pi/2$, odnosno

$$B = \mu_0 N' I . \tag{11.6}$$

Čitaocu se preporučuje da, radi ilustracije, odredi vektor magnetske indukcije u centru solenoida i u centrima prvog i poslednjeg zavojka solenoida, ako je $b = 2a$, te da skicira funkciju $B(z)$, $-\infty < z < \infty$, pod pretpostavkom $I > 0$.

12. Oko lopte od stiropora, poluprečnika a, namotano je N zavojaka izolovane tanke žice u istom smeru, zavojak do zavojka. Okolna sredina je vazduh. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u centru lopte kada se u žici uspostavi stalna struja jačine I. (*Z940521*)

REŠENJE:
Primenićemo sličan postupak kao u prethodnome zadatku i podeliti loptu na tanke prstenove, poluprečnika $a_p = a \sin\theta$ i širine $dl_p = a \, d\theta$ (slika 12.1). Svaki takav prsten ćemo posmatrati kao žičani zavojak, sa strujom jačine

$$dI = N' dl_p I = \frac{NI \, d\theta}{\pi} , \tag{12.1}$$

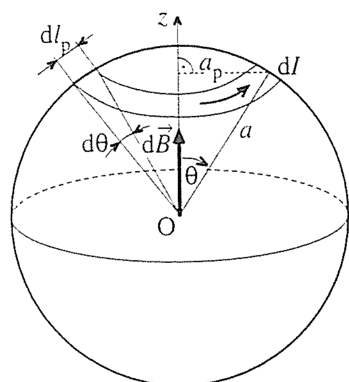
gde je $N' = N/(\pi a)$ podužna gustina zavojaka. Magnetska indukcija prstena je, prema izrazu (2.4),

$$dB = \frac{\mu_0 \, dI a_p^2}{2a^3} k . \tag{12.2}$$

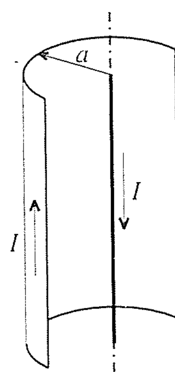
pa je rezultantna indukcija

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi a} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \frac{\mu_0 N I}{4a} k . \tag{12.3}$$

13. U vrlo dugačkom provodniku oblika polovine kružnog cilindra, poluprečnika a i debljine δ ($\delta \ll a$), postoji stalna struja jačine I. U osi cilindra, u vakuumu, postavljen je linijski provodnik u kome takođe postoji struja jačine I, kao što je prikazano na slici 13.1. Izračunati vektor podužne sile koja deluje na linijski provodnik. (*Z950929*)



Slika 12.1.



Slika 13.1.

REŠENJE:
Sila na deo linijskog provodnika dužine l, kome je pridružen vektor $\boldsymbol{l}$ istoga smera kao referentni smer struje provodnika, dobija se po obrascu

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \,. \tag{13.1}$$

gde je $\boldsymbol{B}$ vektor magnetske indukcije provodnika u obliku polucilindra na njegovoj osi (tj. na mestu linijskog provodnika) u odsustvu linijskog provodnika.

Slika 13.2.

Magnetsku indukciju polucilindra ćemo odrediti primenom principa superpozicije. Podelićemo polucilindar na elementarne trake, širine $\mathrm{d}l$. Indukciju svake takve trake aproksimiraćemo indukcijom vrlo dugačkog linijskog provodnika, postavljenog u osi trake. Jačina struje ekvivalentnog linijskog provodnika je

$$\mathrm{d}I = \frac{I}{\pi a}\,\mathrm{d}l \tag{13.2}$$

(slika 13.2).[1] Odgovarajući vektor magnetske indukcije ($\mathrm{d}\boldsymbol{B}$) je cirkularan u odnosu na osu provodnika, a intenzitet toga vektora na osi polucilindra je

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0\,\mathrm{d}I}{2\pi a} \,. \tag{13.3}$$

Zbog simetrije, rezultantna indukcija ima samo y-komponentu, koja iznosi

$$B_y = \int_l \mathrm{d}B_y = \int_l \mathrm{d}B\cos\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\phi\,\mathrm{d}\phi = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 a} \,, \tag{13.4}$$

[1] Stalna struja je uvek ravnomerno raspodeljena po poprečnom preseku homogenog cilindričnog provodnika.

pri čemu je l kontura poprečnog preseka polucilindra i upotrebljena je relacija $\mathrm{d}l = a\,\mathrm{d}\phi$.

Konačno, na osnovu jednačina (13.1) i (13.4), podužna sila na provodnik u osi polucilindra je

$$\boldsymbol{F}' = \frac{\mu_0 I^2}{\pi^2 a}\,\boldsymbol{i} \,. \tag{13.5}$$

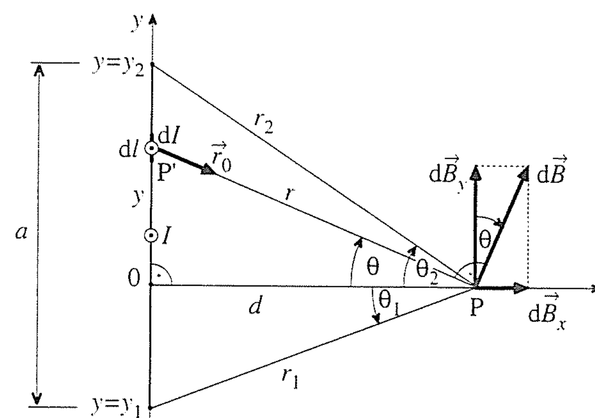
Na osnovu zakona akcije i reakcije, podužna sila koja deluje na polucilindar je suprotna. Izraz za tu silu može se dobiti i direktno, kao

$$\boldsymbol{F}'_{\text{na polucilindar}} = \int_l (\,\mathrm{d}\boldsymbol{F}')_{\text{na elementarnu traku}} = \int_l \mathrm{d}I\,\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}_{\text{linijskog provodnika}} \,, \tag{13.6}$$

gde je jačina struje $\mathrm{d}I$ data izrazom (13.2).

14. U veoma dugačkom provodniku u obliku veoma tanke ravne trake, širine a, postoji stalna struja jačine I. Permeabilnost je svuda μ_0. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u proizvoljnoj tački prostora.

REŠENJE:
Problem je cilindričan dvodimenzioni i treba ga rešavati u ravni poprečnog preseka. Na slici 14.1 skiciran je poprečni presek trake i ucrtana tačka (P) u kojoj treba izračunati magnetsku indukciju. Geometrija problema je određena koordinatama y_1 i y_2 (odnosno uglovima θ_1 i θ_2) i odstojanjem d. Pri tome je $y_2 - y_1 = a$. [Za položaj tačke P sa slike 14.1 je $y_1 < 0$ ($\theta_1 < 0$) i $y_2 > 0$ ($\theta_2 > 0$).]



Slika 14.1.

Podelićemo traku na elementarne trake, širine $\mathrm{d}l = \mathrm{d}y$, i elementarnu magnetsku indukciju izračunati kao u prethodnome zadatku. Ovde je

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I\,\mathrm{d}y}{2\pi a r} \,, \qquad r = \sqrt{y^2 + d^2} \,. \tag{14.1}$$

Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ razlažemo na x- i y-komponentu,

$$\mathrm{d}B_x = \mathrm{d}B\sin\theta\,, \quad \mathrm{d}B_y = \mathrm{d}B\cos\theta\,, \tag{14.2}$$

pa je superpozicijom

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}y}{r}\,, \quad B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\cos\theta\,\mathrm{d}y}{r}\,. \tag{14.3}$$

Iz (11.3) sledi

$$\frac{\cos\theta\,\mathrm{d}y}{r} = \mathrm{d}\theta\,. \tag{14.4}$$

Odavde je

$$\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}y}{r} = \mathrm{tg}\,\theta\,\mathrm{d}\theta\,. \tag{14.5}$$

Na osnovu gornjnih relacija, integrali (14.3) se jednostavno rešavaju,

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{tg}\,\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\frac{r_2}{r_1}\,, \tag{14.6}$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}(\theta_2-\theta_1)\,, \tag{14.7}$$

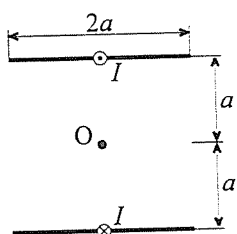
pa je

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left[\boldsymbol{i}\ln\frac{r_2}{r_1} + (\theta_2-\theta_1)\,\boldsymbol{j}\right]\,. \tag{14.8}$$

U gornjim izrazima, r_1 i r_2 su odstojanja tačke P od odgovarajućih temena duži koja predstavlja poprečni presek provodne trake.

Zadatak se može rešiti i integracijom po koordinati y, što se ostavlja čitaocu za vežbu.

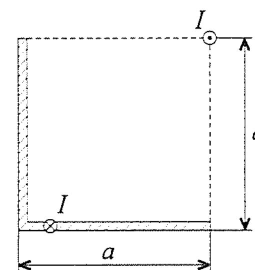
15. Dve tanke, dugačke bakarne trake, širine $2a$, postavljene su paralelno jedna drugoj u vakuumu, na međusobnom odstojanju $2a$. Poprečni presek traka je prikazan na slici 15.1. U trakama postoje stalne struje istih intenziteta I, a suprotnih smerova. Odrediti vektor magnetske indukcije u središtu poprečnog preseka sistema (tački O). (*Z890527*)



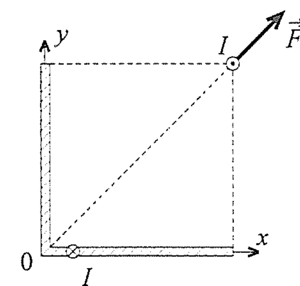
Slika 15.1.

REZULTAT:
Na osnovu rešenja prethodnog zadatka, primenom superpozicije se lako dobija: $\boldsymbol{B} = \mu_0 I \boldsymbol{i}_\mathrm{B}/(2a)$, pri čemu ort $\boldsymbol{i}_\mathrm{B}$ leži u ravni poprečnog preseka traka, paralelan je trakama, a smer toga vektora je udesno.

16. Jedan provodnik veoma dugačkog pravolinijskog voda je tanka traka širine $2a$, savijena oko sredine pod pravim uglom, a drugi provodnik je žica. Poprečni presek voda je prikazan na slici 16.1. U vodu je uspostavljena stalna struja jačine I. Odrediti vektor podužne magnetske sile na žičani provodnik ovoga voda. (*Z960920*)



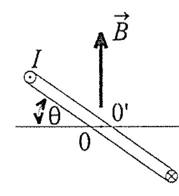
Slika 16.1.



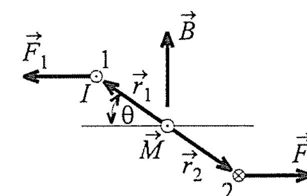
Slika 16.2.

REZULTAT:
Prema slici 16.2, traženi vektor podužne sile je dat izrazom $\boldsymbol{F}' = \mu_0 I^2(\pi+2\ln 2)(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})/(8\pi a)$.

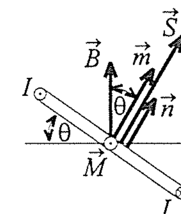
17. Kruto kolo u obliku kvadrata, dužine stranice a, nalazi se u homogenom stalnom magnetskom polju, vektora indukcije $\boldsymbol{B}$, kao na slici 17.1. U kolu postoji stalna struja jačine I. Ugao između ravni kola i ravni normalne na vektor indukcije je θ. Kolo može da se obrće oko ose O-O', upravne na ravan crteža. Odrediti momenat magnetskih sila koje deluju na kolo. (*P961004*)



Slika 17.1.



Slika 17.2.



Slika 17.3.

REŠENJE:
Momenat prema osi O-O' daju samo magnetske sile na stranice kola paralelne toj osi, označene na slici 17.2 sa 1 i 2. Pojedinačni momenti na ove stranice su, redom,

$$\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{r}_1\times\boldsymbol{F}_1\,, \quad \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{r}_2\times\boldsymbol{F}_2\,, \tag{17.1}$$

gde su $\boldsymbol{F}_1$ i $\boldsymbol{F}_2$ vektori magnetskih sila na stranice kola, a $\boldsymbol{r}_1$ i $\boldsymbol{r}_2$ odgovarajući potezi u odnosu na osu O-O'. Kako je

$$F_1 = F_2 = IaB\,, \tag{17.2}$$

to je

$$M_1 = M_2 = \frac{a}{2} F_1 \sin\theta = \frac{Ia^2 B \sin\theta}{2} . \tag{17.3}$$

Konačno, traženi momenat magnetskih sila na strujno kolo iznosi

$$M = 2M_1 = Ia^2 B \sin\theta . \tag{17.4}$$

Vektor $\boldsymbol{M}$ je prikazan na slici 17.2.

Zadatak ćemo rešiti i na drugi način, koristeći se obrascem za rezultantni momenat magnetskih sila na kruto ravno strujno kolo (konturu) u homogenom magnetskom polju:

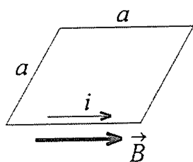
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} . \tag{17.5}$$

U ovome obrascu, $\boldsymbol{m}$ je magnetski momenat strujnog kola,

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{S} = IS\boldsymbol{n} , \tag{17.6}$$

gde je S površina kola (u našem slučaju $S = a^2$), a $\boldsymbol{n}$ ort normale na površ kola čiji je smer vezan pravilom desne zavojnice sa referentnim smerom struje u kolu (slika 17.3). Očigledno, dobija se isti rezultat za vektor $\boldsymbol{M}$ kao pri rešavanju zadatka na prvi način.

18. Kruta kvadratna kontura, dužine stranice a, nalazi se u homogenom magnetskom polju, indukcije $B(t) = B_{\mathrm{m}} \cos\omega t$, tako da je vektor $\boldsymbol{B}$ paralelan jednoj stranici (slika 18.1). U konturi postoji prostoperiodična struja, jačine $i(t) = I_{\mathrm{m}} \cos(\omega t - \pi/4)$. Kolika je srednja vrednost momenta magnetskih sila koji deluje na konturu? (*P950903*)



Slika 18.1.

REŠENJE:
Prema obrascima (17.5) i (17.6), vektor momenta magnetskih sila leži u ravni konture (nacrtati vektor $\boldsymbol{M}$), a trenutni intenzitet ovoga vektora je

$$M(t) = i(t) a^2 B(t) = a^2 I_{\mathrm{m}} B_{\mathrm{m}} \cos\omega t \cos(\omega t - \pi/4) . \tag{18.1}$$

Srednja vrednost momenta je

$$M_{\mathrm{sr}} = \frac{a^2 I_{\mathrm{m}} B_{\mathrm{m}}}{T} \int_0^T \cos\omega t \cos(\omega t - \pi/4)\,\mathrm{d}t =$$

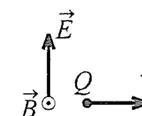
$$\frac{a^2 I_{\mathrm{m}} B_{\mathrm{m}}}{2T} \left[\int_0^T \cos(2\omega t - \pi/4)\,\mathrm{d}t + \int_0^T \cos\pi/4\,\mathrm{d}t \right] = \frac{\sqrt{2} a^2 I_{\mathrm{m}} B_{\mathrm{m}}}{4} , \tag{18.2}$$

pri čemu je $T = 2\pi/\omega$ period date prostoperiodične struje, odnosno indukcije.

19. Naelektrisana čestica, mase m i naelektrisanja Q, uleće brzinom $\boldsymbol{v}$ u ukršteno homogeno električno polje, jačine $\boldsymbol{E}$, i magnetsko polje, indukcije $\boldsymbol{B}$, pri čemu vektori $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{B}$ međusobno zaklapaju prave uglove, kao što je prikazano na slici 19.1. Kakva veza postoji između Q, m, v, E i B ako se čestica pod dejstvom električne i magnetske sile kreće pravolinijski? (*P940829*)

REŠENJE:
Iz uslova zadatka, a na osnovu Njutnovog zakona o sili, rezultanta električne i magnetske sile na česticu (Lorencova sila) mora biti nula, pa je

$$Q\boldsymbol{E} + Q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = 0 . \tag{19.1}$$



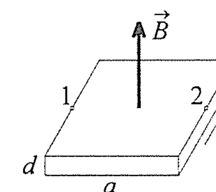
Slika 19.1.

Odavde je tražena veza $E = vB$.

20. Naelektrisana čestica, mase m i naelektrisanja Q, uleće brzinom v u homogeno magnetsko polje, indukcije B, normalno na linije magnetskog polja. Koliki je poluprečnik kruga po kome se čestica kreće, a koliko vreme za koje opiše ceo krug? (*P920403*)

REZULTAT:
Izjednačavajući intenzitete magnetske i centrifugalne sile na česticu, za poluprečnik kružne putanje čestice dobijamo $r = mv/(QB)$, odakle je period kretanja čestice (vreme za koje čestica opiše ceo krug) $T = 2\pi m/(QB)$.

21. Naelektrisana čestica, mase m i naelektrisanja Q, kreće se u homogenom magnetskom polju samo pod dejstvom magnetske sile. Vektor magnetske indukcije ($\boldsymbol{B}$) paralelan je z-osi Dekartovog koordinatnog sistema. U trenutku $t = 0$ čestica prolazi kroz koordinatni početak, njena brzina je v, a vektor $\boldsymbol{v}$ zaklapa sa z-osom ugao θ. Putanja čestice će, posle izvesnog vremena, preseći jednu od tri koordinatne ose. (a) Koju osu, (b) posle kog vremena i (c) na kom odstojanju od koordinatnog početka? (*P950614*)



Slika 22.1.

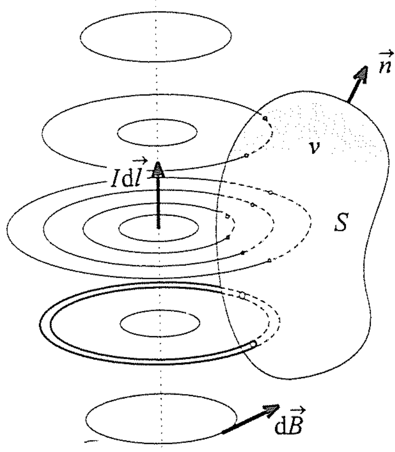
REZULTAT:
Čestica se kreće po helikoidalnoj putanji koja periodično preseca z-osu, u vremenskim intervalima $T = 2\pi m/(QB)$. Međusobna odstojanja tačaka preseka iznose $d = 2\pi m v \cos\theta/(QB)$.

22. Holov element za merenje magnetske indukcije, prikazan na slici 22.1, ima oblik trake pravougaonog poprečnog preseka, dimenzija a i d. Koncentracija slobodnih nosilaca trake je N', a naelektrisanje svakog nosioca Q. U elementu postoji

stalna struja jačine I. Vektor magnetske indukcije je normalan na traku. Voltmetrom je izmeren napon U_{12}. Koliki je algebarski intenzitet vektora magnetske indukcije (B) u odnosu na označeni referentni smer? (*P950904*)

REZULTAT:
Traženi algebarski intenzitet je $B = -N'QdU_{12}/I$.

23. Polazeći od izraza za magnetsku indukciju strujnog elementa u vakuumu dokazati zakon o konzervaciji magnetskog fluksa. (*P950924*)



Slika 23.1.

REŠENJE:
Posmatrajući izraz (2.1) za vektor magnetske indukcije strujnog elementa $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$, zaključujemo da su linije toga vektora kružnice u ravnima normalnim na pravu koja sadrži strujni element, sa centrima na toj pravoj (slika 23.1). Moguće je zamisliti snopove ovih linija koji obrazuju tanke zatvorene tube konstantnog poprečnog preseka. Jedna takva tuba je prikazana na slici 23.1. Prema izrazu (2.1), intenzitet vektora magnetske indukcije je kontstantan duž svake linije indukcije. Kako su zamišljene tube tanke, to se ovaj intenzitet može smatrati konstantnim po čitavoj zapremini tube. Odavde sledi da je magnetski fluks po apsolutnoj vrednosti isti kroz bilo koji presek tube, bez obzira da li je taj presek upravan na osu tube, ili nije.

Zamislimo sada proizvoljnu zatvorenu površ S u polju (slika 23.1). Označimo sa v domen obuhvaćen ovom površi. Neke od elementarnih tuba presecaju površ S, ali to uvek čine paran broj puta. Ako duž proizvoljne tube izračunamo magnetske fluseve kroz sve preseke tube i površi S, a pri tome površi preseka $\mathrm{d}S$ orijentišemo uvek tako da vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ bude usmeren upolje u odnosu na površ S, dobićemo niz parova flukseva istih po apsolutnoj vrednosti, a suprotnih po znaku. Stoga je rezultantni izlazni fluks vektora magnetske indukcije jednog strujnog elementa, $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$, kroz sve površi preseka $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ tube i površi S jednak nuli. Kako takvim presecima možemo prekriti čitavu površ S, odnosno odgovarajućim delovima elementarnih tuba zapremiti čitav domen v, to je

$$\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 . \tag{23.1}$$

Na osnovu principa superpozicije, magnetska indukcija $\boldsymbol{B}$ proizvoljne raspodele struje u vakuumu može se razložiti na elementarne indukcije $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ pojedinih strujnih

elemenata, pa imamo

$$\boldsymbol{B} = \int_{v_{\mathrm{str}}} \mathrm{d}\boldsymbol{B} , \tag{23.2}$$

gde je v_{str} domen u kome postoje struje (izvori magnetske indukcije). Konačno, primenom operatora integracije po domenu v_{str} na jednačinu (23.1), te zamenom redosleda znakova integracije i koristeći se osobinom distributivnosti skalarnog proizvoda vektora prema sabiranju (integraciji) vektora, dobijamo

$$\oint_S \left(\int_{v_{\mathrm{str}}} \mathrm{d}\boldsymbol{B} \right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 , \tag{23.3}$$

što, uz (23.2), daje zakon o konzervaciji magnetskog fluksa (1.2).

24. Polazeći od osnovnih integralnih jednačina za stalno magnetsko polje dokazati da je magnetski fluks kroz konturu jedinstven. (*P961004*)

REŠENJE:
Pretpostavimo suprotno, tj. da su magnetski fluksevi kroz površi S_1 i S_2 na slici 24.1, orijentisane na isti način, različiti. Ovi fluksevi su

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \quad \mathrm{i} \quad \Phi_2 = \int_{S_2} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} . \tag{24.4}$$

Tada je fluks kroz zatvorenu površ S (slika 24.1), orijentisanu upolje,

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \Phi_1 - \Phi_2 \neq 0 , \tag{24.5}$$

što protivreči zakonu o konzervaciji magnetskog fluksa (1.2). Time je dokaz završen.

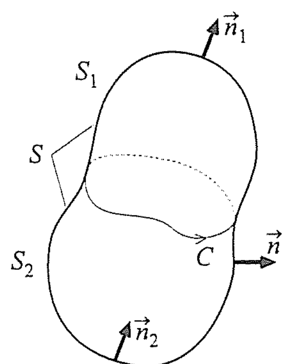
25. U vrlo dugačkom cilindričnom bakarnom provodniku kružnog poprečnog preseka, poluprečnika a, postoji stalna struja jačine I. Provodnik se nalazi u vakuumu. Odrediti vektor magnetske indukcije unutar i izvan provodnika.

REŠENJE:
Gustina struje u provodniku je

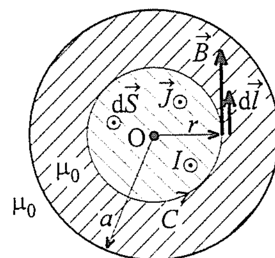
$$J = \frac{I}{\pi a^2} . \tag{25.1}$$

Zbog simetrije, vektor magnetske indukcije, $\boldsymbol{B}$, je cirkularan (linije toga vektora su krugovi sa centrima na osi provodnika) i intenzitet mu zavisi samo od radijalne koordinate, r. Usvojimo referentni smer za vektor $\boldsymbol{B}$ kao na slici 25.1. Prema Amperovom zakonu (1.1),[2] primenjenom na kružnu konturu C poluprečnika r, je

$$B 2\pi r = \begin{cases} \mu_0 J \pi r^2 & \text{za } r < a \\ \mu_0 I & \text{za } r \geq a \end{cases} , \tag{25.2}$$



Slika 24.1.



Slika 25.1.

odakle sledi

$$B = \begin{cases} \mu_0 I r/(2\pi a^2) & \text{za } r < a \\ \mu_0 I/(2\pi r) & \text{za } r \geq a \end{cases} . \tag{25.3}$$

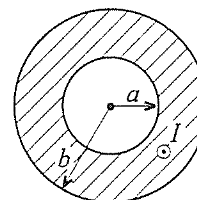
Očigledno, magnetsko polje van datog provodnika identično je polju žičanog provodnika sa strujom jačine I, postavljenog u osi provodnika sa slike 25.1.

26. U vrlo dugačkom, šupljem, cilindričnom bakarnom provodniku postoji stalna struja jačine I. Poluprečnici provodnika su a i b $(a < b)$, a sredina je svuda nemagnetska. Poprečni presek provodnika je prikazan na slici 26.1. Odrediti vektor magnetske indukcije u tački na odstojanju r $(0 \leq r < \infty)$ od ose provodnika. (*P900622*)

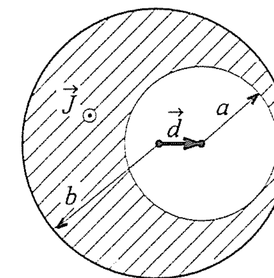
REZULTAT:
Vektor magnetske indukcije je cirkularan, a u odnosu na referentni smer vezan pravilom desne zavojnice sa referentnim smerom struje u provodniku izrazi za intenzitet ovoga vektora su $B = 0$, za $r \leq a$, $B = \mu_0 I(r^2 - a^2)/[2\pi r(b^2 - a^2)]$, za $a \leq r \leq b$ i $B = \mu_0 I/(2\pi r)$, za $r > b$.

27. Na slici 27.1 je prikazan poprečni presek veoma dugačkog, cilindričnog bakarnog provodnika sa ekscentričnom šupljinom. Poluprečnik provodnika je b, poluprečnik šupljine je a, a njena osa je pomerena u odnosu na osu provodnika za vektor $\boldsymbol{d}$ $(a + d \leq b)$. U šupljini i izvan provodnika je vazduh. Izračunati vektor magnetske indukcije u šupljini, ako je u provodniku uspostavljena stalna struja gustine J.

[2] Bakar je blagi dijamagnetik, pa mu je permeabilnost praktično jednaka permeabilnosti vakuuma, $\mu \approx \mu_0$.



Slika 26.1.



Slika 27.1.

REŠENJE:
Gustina struje sa slike 27.1 jednaka je (u svakoj tački) zbiru gustina struje u odgovarajućim tačkama sistema prikazanih na slici 27.2. Po principu superpozicije, magnetska indukcija originalne (rezultantne) raspodele struje, $\boldsymbol{B}$, može se dobiti kao

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2 , \tag{27.1}$$

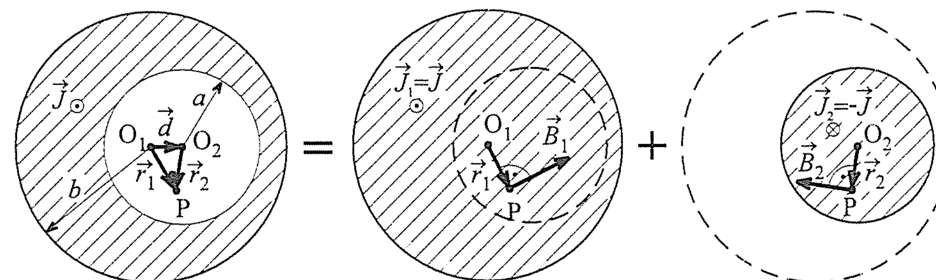
gde su $\boldsymbol{B}_1$ i $\boldsymbol{B}_2$ indukcije parcijalnih raspodela struje, sa slike 27.2, koje, prema izrazima (25.3) i (25.1) i slikama 25.1 i 27.2, mogu da se napišu u obliku

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\mu_0 \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{r}_1}{2} , \qquad \boldsymbol{B}_2 = \frac{-\mu_0 \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{r}_2}{2} , \tag{27.2}$$

gde su $\boldsymbol{r}_1$ i $\boldsymbol{r}_2$ vektori položaja tačke u kojoj računamo indukciju (P) u odnosu na ose provodnika i šupljine, respektivno. Konačno, kombinovanjem gornjih jednačina, dobijamo

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 \boldsymbol{J} \times (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}{2} = \frac{\mu_0 \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{d}}{2} . \tag{27.3}$$

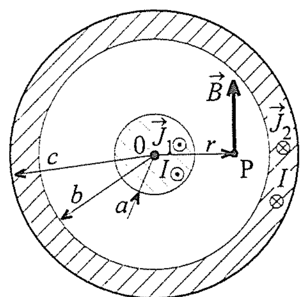
Očigledno, magnetsko polje unutar šupljine je homogeno, jer u gornjem izrazu za vektor rezultantne magnetske indukcije ne figuriše položaj tačke P.



Slika 27.2.

28. Provodnici koaksijalnog kabla su od bakra, a dielektrik je vazduh. Poluprečnik unutrašnjeg provodnika je a, a poluprečnici spoljašnjeg provodnika su b i c ($a < b < c$). U kablu je uspostavljena stalna struja, jačine I. Odrediti vektor magnetske indukcije u provodnicima i dielektriku kabla. (*Z920914*)

REŠENJE:
Zbog simetrije, vektor magnetske indukcije je cirkularan (slika 28.1). Primenom Amperovog zakona, za intenzitet ovoga vektora dobijamo



Slika 28.1.

$$B = \frac{\mu_0 J_1 r}{2} \quad (0 \le r \le a)\,,$$

$$B = \frac{\mu_0 a^2 J_1}{2r} \quad (a < r < b)\,,$$

$$B = \frac{\mu_0[a^2 J_1 - (r^2 - b^2)J_2]}{2r} \quad (b \le r \le c)\,,$$

$$B = 0 \quad (r > c)\,. \tag{28.1}$$

U gornjim izrazima, $J_1 = I/(\pi a^2)$ i $J_2 = I/[\pi(c^2 - b^2)]$ su gustine struje u unutrašnjem i spoljašnjem provodniku kabla, respektivno.

29. Veoma dugačak cilindar, poluprečnika a, ravnomerno je naelektrisan po zapremini naelektrisanjem gustine ρ. Cilindar rotira oko svoje ose stalnom ugaonom brzinom w. Permeabilnost je svuda μ_0. Odrediti izraz za vektor magnetske indukcije u proizvoljnoj tački prostora, smatrajući da se raspodela naelektrisanja cilindra pri rotaciji ne menja. (*Z960703*)

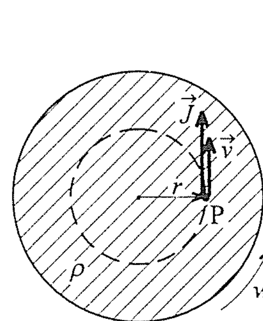
REŠENJE:
Na slici 29.1 je predstavljen poprečni presek cilindra. Kako se naelektrisanja cilindra okreću sa cilindrom, ona obrazuju električnu struju (tzv. konvekcionu struju). Vektor gustine struje u tački P na odstojanju r od ose cilindra je

$$\boldsymbol{J} = N'Q\boldsymbol{v}\,, \tag{29.1}$$

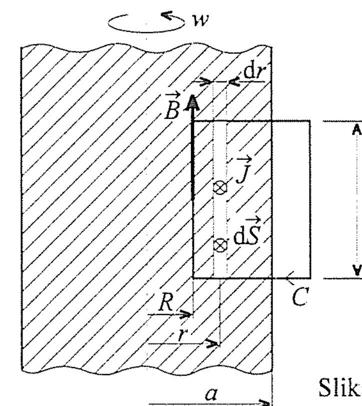
gde je N' koncentracija elementarnih naelektrisanja Q, a $\boldsymbol{v}$ brzina tih naelektrisanja u tački P. Kako je $\rho = N'Q$ i $v = wr$, to je

$$J = \rho w r\,. \tag{29.2}$$

Strujnice su kružne, pa cilindar sa zapreminskom strujom gustine $\boldsymbol{J}$ možemo posmatrati kao niz veoma dugačkih koaksijalnih solenoida. Stoga je vektor magnetske indukcije, $\boldsymbol{B}$, van cilindra (tj. van svih zamišljenih solenoida) nula, dok je unutar cilindra, u tački na odstojanju R od ose cilindra ($R < a$), ovaj vektor aksijalan (predstavlja superpoziciju indukcija zamišljenih solenoida čiji su poluprečnici



Slika 29.1.



Slika 29.2.

veći od R). Na slici 29.2 je prikazan uzdužni presek cilindra. Iz Amperovog zakona primenjenog na pravougaonu konturu C je

$$B(R)\,l = \mu_0 \int_{r=R}^{a} J(r)\,\underbrace{l\,\mathrm{d}r}_{\mathrm{d}S} = \mu_0 \rho w l \int_R^a r\,\mathrm{d}r \tag{29.3}$$

(površ $\mathrm{d}S$ je šrafirana na slici 29.2), pa za intenzitet vektora magnetske indukcije u tačkama na odstojanju R od ose obrtanja dobijamo

$$B(R) = \begin{cases} \mu_0 \rho w (a^2 - R^2)/2 & \text{za } R < a \\ 0 & \text{za } R \ge a \end{cases}\,. \tag{29.4}$$

30. Dokazati da po zapremini homogeno namagnetisanog feromagnetskog materijala nema Amperovih struja.

REŠENJE:
Zamislimo proizvoljnu malu površ S u materijalu, oivičenu konturom C. Jačina ukupne Amperove struje kroz tu površ je

$$I_A = \oint_C \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\,, \tag{30.1}$$

gde je $\boldsymbol{M}$ vektor magnetizacije. Kako je po uslovu zadatka $\boldsymbol{M} = \mathbf{const}$ (homogeno namagnetisan feromagnetik), imamo, vodeći računa o osobini distributivnosti skalarnog množenja prema sabiranju vektora,

$$I_A = \boldsymbol{M} \cdot \oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l}\,, \tag{30.2}$$

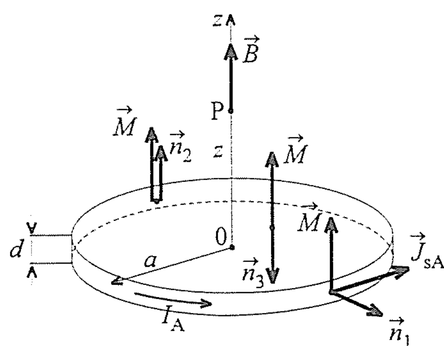
odakle, s obzirom na $\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$, sledi

$$I_A = 0\,. \tag{30.3}$$

Dobijeni rezultat ne zavisi od oblika i položaja konture C. To znači da po zapremini homogeno namagnetisanog feromagnetika nema Amperovih struja, što je i trebalo dokazati.

Napomena: Slučaj *homogeno namagnetisanog feromagnetika* treba razlikovati od slučaja *namagnetisanog homogenog feromagnetika* (videti zadatak 37).

31. Tanak disk od feromagnetika, poluprečnika a i debljine d ($d \ll a$), homogeno je namagnetisan po svojoj zapremini. Vektor magnetizacije je normalan na bazise diska, a intenzitet mu je M. Okolna sredina je vakuum. Odrediti (a) raspodelu Amperovih struja diska i (b) vektor magnetske indukcije u proizvoljnoj tački na osi diska normalnoj na njegove bazise. (*P961004*)



Slika 31.1.

REŠENJE:

(a) Pošto je disk homogeno namagnetisan, po njegovoj zapremini nema Amperovih struja. Vektor gustine površinskih Amperovih struja u proizvoljnoj tački površi feromagnetika se određuje kao

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{sA}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n} \,. \tag{31.1}$$

gde je $\boldsymbol{n}$ ort normale na površ feromagnetika usmeren od feromagnetika, a $\boldsymbol{M}$ vektor magnetizacije u feromagnetiku, neposredno uz površ. Na osnovu gornje relacije i slike 31.1, gustina površinskih Amperovih struja na omotaču diska iznosi

$$J_{\mathrm{sA}} = M \,, \tag{31.2}$$

dok je na bazisima diska $J_{\mathrm{sA}} = 0$.

(b) Uticaj feromagnetika na magnetsku indukciju se može zameniti izračunatom raspodelom Amerovih struja u vakuumu. Kako je dati feromagnetski disk tanak, to se uska traka Amperovih struja po njegovom omotaču može ekvivalentirati kružnom strujnom konturom, poluprečnika a i jačine struje

$$I_{\mathrm{A}} = J_{\mathrm{sA}} d = Md \,. \tag{31.3}$$

Konačno, koristeći se obrascem (2.5), za indukciju na osi diska (slika 31.1) dobijamo

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 M d a^2}{2\,(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\boldsymbol{k} \,. \tag{31.4}$$

32. Vrlo dugačak cilindar od od feromagnetskog materijala, kružnog poprečnog preseka poluprečnika a, homogeno je namagnetisan po svojoj zapremini tako da je vektor magnetizacije $\boldsymbol{M}$ paralelan osi cilindra. Cilindar se nalazi u vakuumu. (a) Odrediti raspodelu Amperovih struja cilindra. (b) Koliki je vektor magnetske indukcije u sredini cilindra? (*P890527*)

REZULTAT:

(a) Po omotaču cilindra postoje cirkularne površinske Amperove struje gustine $J_{\mathrm{sA}} = M$, pri čemu je smer vektora magnetizacije vezan sa smerom ovih struja pravilom desne zavojnice. (b) U sredini cilindra je $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{M}$.

33. Feromagnetski cilindar kružnog poprečnog preseka, poluprečnika a i dužine $b = 2a$, homogeno je namagnetisan tako da je vektor magnetizacije $\boldsymbol{M}$ paralelan osi cilindra. Okolna sredina je vazduh. Odrediti raspodelu Amperovih struja cilindra i vektore magnetske indukcije i jačine magnetskog polja u centru cilindra. (*P970423*)

REŠENJE:

Raspodela površinskih Amperovih struja je ista kao kod feromagnetskog diska sa slike 31.1. Što se tiče magnetske indukcije, feromagnetski materijal cilindra se može ukloniti, a proračun obaviti za slučaj plašta površinskih Amperovih struja po omotaču cilindra, poluprečnika a i dužine b, u vakuumu. Ovome plaštu je ekvivalentan solenoid istih dimenzija kod koga proizvod broja zavojaka i jačine struje iznosi

$$NI = J_{\mathrm{sA}} b = Mb \,. \tag{33.1}$$

Stoga, na osnovu obrasca (11.5), za vektor magnetske indukcije u centru cilindra dobijamo

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 \sqrt{2}}{2}\boldsymbol{M} \,. \tag{33.2}$$

Po definiciji, vektor jačine magnetskog polja je

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \,, \tag{33.3}$$

što u centru feromagnetskog cilindra iznosi $\boldsymbol{H} = -(1 - \sqrt{2}/2)\boldsymbol{M}$.

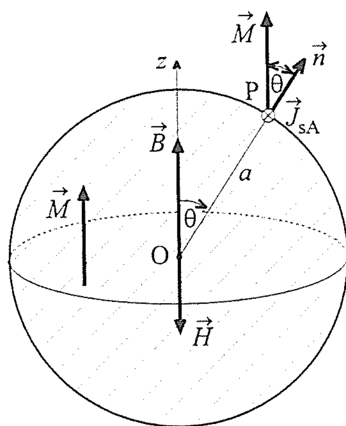
34. Lopta od feromagnetika, poluprečnika a, nalazi se u vazduhu. Lopta je homogeno namagnetisana po svojoj zapremini. Intenzitet vektora magnetizacije je M. Odrediti: (a) raspodelu Amperovih struja po površi lopte, (b) vektor magnetske indukcije u centru lopte i (c) vektor jačine magnetskog polja u centru lopte.

REŠENJE:

(a) Uvedimo koordinatni sistem čija je z-osa paralelna vektoru magnetizacije, $\boldsymbol{M}$ (slika 34.1). Gustina zapreminskih Amperovih struja u proizvoljnoj tački lopte je nula (lopta je homogeno namagnetisana). Gustina površinskih Amperovih struja u

tački P na površi lopte, čiji je položaj definisan uglom θ, iznosi, na osnovu obrasca (31.1),

$$J_{sA} = M\sin(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{M}) = M\sin\theta\ , \quad 0 \le \theta \le \pi\ . \tag{34.1}$$



Slika 34.1.

(b) Nakon uklanjanja feromagnetskog materijala, za računanje vektora magnetske indukcije sferičnog plašta Amerovih struja, gustine opisane funkcijom (34.1), primenjujemo postupak iz zadatka 12. Ovde za jačinu struje elementarnog prstena sa slike 12.1 imamo

$$\mathrm{d}I_A = J_{sA}a\,\mathrm{d}\theta = Ma\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\ , \tag{34.2}$$

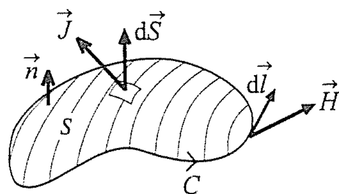
pa se za vektor $\boldsymbol{B}$ u centru lopte dobija

$$\boldsymbol{B} = \frac{2}{3}\mu_0\boldsymbol{M}\ . \tag{34.3}$$

(c) Koristeći se obrascem (33.3), vektor jačine magnetskog polja u centru feromagnetske lopte je

$$\boldsymbol{H} = -\frac{\boldsymbol{M}}{3}\ . \tag{34.4}$$

35. Napisati dve osnovne integralne jednačine za stalno magnetsko polje u feromagnetskoj sredini. Koja je još relacija potrebna da bi se dobio potpuni sistem? (*P930926*)



Slika 35.1.

REŠENJE:
Osnovne integralne jednačine za stalno magnetsko polje u feromagnetskoj sredini su uopšteni Amperov zakon,

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{35.1}$$

(slika 35.1), i zakon o konzervaciji magnetskog fluksa (1.2), gde je $\boldsymbol{J}$ gustina (kondukcione) struje.

Da bi stalno magnetsko polje bilo potpuno određeno, još je potrebno u svakoj tački sredine poznavati vezu između vektora magnetske indukcije i jačine magnetskog polja (karakteristiku magnetisanja materijala),

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})\ . \tag{35.2}$$

Ova veza je, u opštem slučaju nelinearna, dok u slučaju linearnih feromagnetika ima oblik

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}\ , \tag{35.3}$$

gde je μ permeabilnost feromagnetika.

36. Polazeći od osnovnih integralnih jednačina za stalno magnetsko polje u feromagnetskoj sredini, izvesti jednačinu kontinuiteta stalnih struja. (*P960613*)

REŠENJE:
Na slici 24.1 je prikazana proizvoljna zatvorena površ S. Uočimo konturu C koja deli tu površ na površi S_1 i S_2. Iz uopštenog Amperovog zakona (35.1) sledi

$$\int_{S_1} \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{S_2} \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\ , \tag{36.1}$$

pri čemu su površi S_1 i S_2 orijentisane nagore. Ako se promeni orijentacija površi S_2, dobija se jednačina kontinuiteta stalnih struja,

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0\ , \tag{36.2}$$

koju je i trebalo izvesti.

37. U linearnom homogenom feromagnetskom materijalu, relativne permeabilnosti μ_r, nema kondukcionih struja. Dokazati da po zapremini toga materijala nema ni Amperovih struja. (*P950614*)

REŠENJE:
Za linearan feromagnetik važi relacija (35.3), što, uz relaciju (33.3), daje

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\boldsymbol{H}\ . \tag{37.1}$$

Odavde je

$$\oint_C \boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\oint_C \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\ , \tag{37.2}$$

gde je C proizvoljna mala kontura zamišljena u feromagnetskom materijalu. Količnik $(\mu-\mu_0)/\mu_0$ se može izvući ispred znaka integrala u (37.2) jer je materijal homogen. Integral na levoj strani znaka jednakosti u (37.2) jednak je jačini ukupne Amperove struje, I_A, kroz površ S oslonjenu na konturu C [videti jednačinu (30.1)]. Integral na desnoj strani znaka jednakosti u (37.2) jednak je nuli, što sledi iz uopštenog Amperovog zakona, s obzirom da po uslovu zadatka u materijalu nema kondukcionih struja. Prema tome, $I_A = 0$. Ovaj rezultat se dobija za ma koji položaj konture C, čime smo dokazali da po zapremini datoga materijala nema Amperovih struja.

38. Polazeći od graničnih uslova za stalno magnetsko polje, izvesti pravilo prelamanja linija magnetskog polja na razdvojnoj površi dve linearne sredine, permeabilnosti μ_1 i μ_2, ako na toj površi nema kondukcionih struja. (*P920205*)

REŠENJE:
Stalna magnetska polja sa dve strane razdvojne površi dve proizvoljne sredine (različitih magnetskih osobina) povezana su posredstvom dva osnovna granična uslova. Ti uslovi se izvode iz integralnih jednačina (35.1) i (1.2), i glase

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{J}_S , \tag{38.1}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B}_2 = 0 , \tag{38.2}$$

gde je $\boldsymbol{n}$ ort normale na razdvojnu površ, usmeren od sredine 2 ka sredini 1, a $\boldsymbol{J}_S$ vektor gustine površinskih kondukcionih struja koje (eventualno) postoje na razdvojnoj površi.

Granični uslov (38.1) se, u slučaju kada na razdvojnoj površi nema kondukcionih struja, može napisati i kao

$$H_{1t} = H_{2t} , \tag{38.3}$$

dok granični uslov (38.2) u sličnoj notaciji glasi

$$B_{1n} = B_{2n} , \tag{38.4}$$

gde su sa 't' i 'n' označene tangencijalne i normalne komponente odgovarajućih vektora, respektivno.

Ako su α_1 i α_2 uglovi između linija polja i normale na razdvojnu površ u prvoj i drugoj sredini, respektivno, onda je $\operatorname{tg}\alpha_1 = B_{1t}/B_{1n}$ i $\operatorname{tg}\alpha_2 = B_{2t}/B_{2n}$. Kako je, prema uslovu (38.3), $B_{1t}/\mu_1 = B_{2t}/\mu_2$, kada se tangensi podele, dobija se relacija

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} , \tag{38.5}$$

koja predstavlja pravilo prelamanja linija stalnog magnetskog polja.

Pod kojim uglom izlaze linije magnetskog polja iz gvožđa ($\mu_r \gg 1$) u nemagnetski materijal?

39. Na veoma dugačko cilindrično jezgro, kružnog poprečnog preseka i permeabilnosti μ, ravnomerno i gusto su namotani zavojci tanke bakarne žice. Podužna gustina zavojaka je N'. Ako u žici postoji stalna struja jačine I, odrediti gustinu površinskih Amperovih struja po površi jezgra. (*P890411*)

REŠENJE:
Magnetsko polje u jezgru je homogeno i aksijalno, a van namotaja je nula. Primenom uopštenog Amperovog zakona, za jačinu magnetskog polja u jezgru dobijamo

$$H = N'I . \tag{39.1}$$

Na osnovu ove relacije, kao i relacija (37.1) i (31.1), gustina površinskih Amperovih struja po omotaču cilindra iznosi

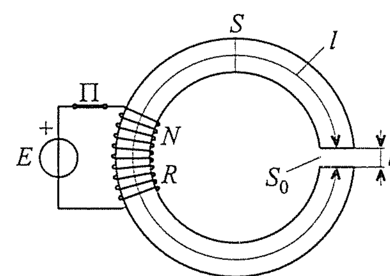
$$J_{sA} = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} N'I . \tag{39.2}$$

Smer ovih struja se poklapa sa smerom kondukcionih struja u namotaju.

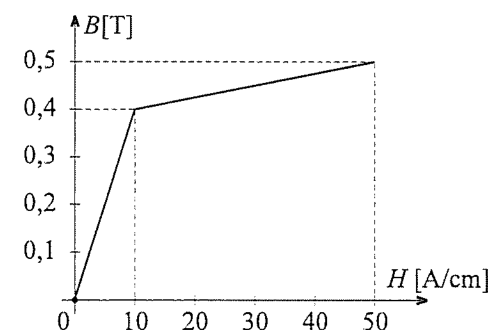
40. Na tanko torusno jezgro, površine poprečnog preseka S i dužine l, ravnomerno i gusto je namotano N zavojaka bakarne žice. Jezgro je načinjeno od feromagnetskog materijala koji se može smatrati linearnim, relativne permeabilnosti μ_r. U zavojcima postoji stalna struja jačine I. Kolika je cirkulacija duž srednje linije torusa vektora (a) magnetske indukcije, (b) jačine magnetskog polja i (c) magnetizacije? (*P910927*)

REZULTAT:
Cirkulacije vektora $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$ i $\boldsymbol{M}$ iznose, redom, $\mu_r\mu_0 NI$, NI i $(\mu_r - 1)NI$, pri čemu su referentni smerovi cirkulacija vezani pravilom desne zavojnice sa referentnim smerom struje u namotaju.

√**41.** Na tankom jezgru od feromagnetskog materijala, u magnetskom kolu sa slike 41.1, ravnomerno i gusto je namotano $N = 1000$ zavojaka tanke žice, ukupne otpornosti $R = 50\ \Omega$. Poznato je: $l = 1$ m, $l_0 = 3,14$ mm, $S = S_0 = 1\ \text{cm}^2$ i $E = 150$ V. Idealizovana karakteristika prvobitnog magnetisanja materijala jezgra je prikazana na slici 41.2. Magnetsko rasipanje se može zanemariti. Izračunati: (a) jačinu magnetskog polja u jezgru i vazdušnom procepu i (b) energiju utrošenu za uspostavljanje toga polja. (*Z950527*)



Slika 41.1.



Slika 41.2.

REŠENJE:
(a) Možemo smatrati da je magnetsko polje u svakom poprečnom preseku magnetskog kola homogeno. Označimo sa B i H, odnosno B_0 i H_0, magnetsku indukciju

i jačinu magnetskog polja u jezgru, odnosno vazdušnom procepu (slika 41.3). Iz uopštenog Amperovog zakona sledi

$$Hl + H_0 l_0 = NI\,, \tag{41.1}$$

gde je $I = E/R = 3$ A jačina struje u namotaju. Na osnovu zakona o konzervaciji magnetskog fluksa imamo

$$B = B_0\,, \tag{41.2}$$

jer se magnetsko rasipanje zanemaruje. Kako je i

$$B_0 = \mu_0 H_0\,, \tag{41.3}$$

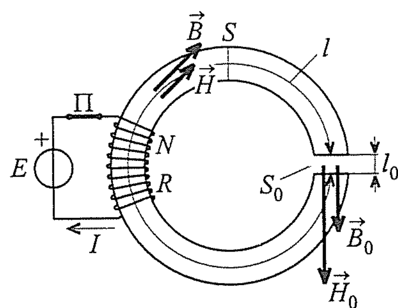
to je

$$Hl + B\frac{l_0}{\mu_0} = NI\,. \tag{41.4}$$

Zamenjujući brojne vrednosti dobijamo sledeću jednačinu:

$$H + 2500B = 3000 \tag{41.5}$$

(H u A/m, B u T), koja predstavlja jednačinu radne prave za dato magnetsko kolo. Ucrtavanjem ove prave u zadati grafik zavisnosti $B(H)$ (slika 41.4) vidi se da presek radne prave i karakteristike magnetisanja (radna tačka) pripada drugome segmentu karakteristike magnetisanja (segmentu kome odgovaraju veće jačine polja). Rešavanjem sistema jednačina koji čine jednačina radne prave i jednačina prave kojoj pripada drugi segment krive magnetisanja, za apscisu i ordinatu radne tačke sa slike 41.4 dobijamo $H = 19,41$ A/cm i $B = 0,423$ T. Sada iz (41.2) i (41.3) sledi $B_0 = 0,423$ T i $H_0 = 337$ kA/m.



Slika 41.3.

(b) Gustina energije utrošene za uspostavljanje magnetskog polja u feromagnetskom jezgru je (slika 41.5)

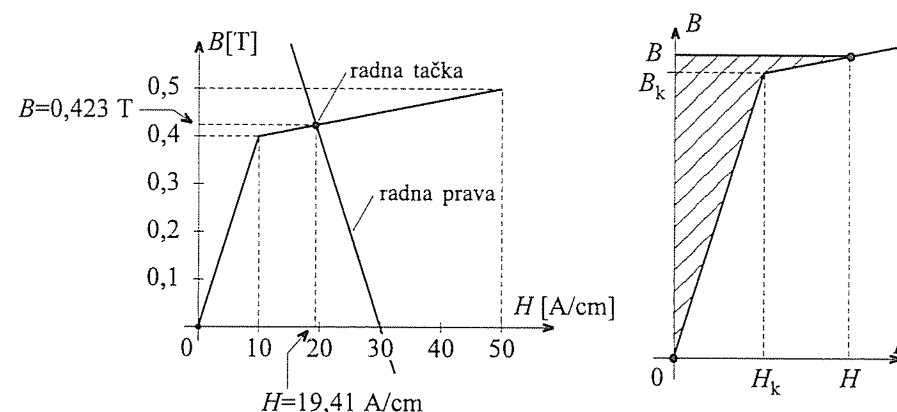
$$w_m = \int_0^B H\,dB = \frac{1}{2}H_k B_k + \frac{1}{2}(H_k + H)(B - B_k) = 234,6\ \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \tag{41.6}$$

(ova gustina energije je srazmerna šrafiranoj površini između karakteristike magnetisanja i B-ose na slici 41.5). Jačina magnetskog polja H_k i indukcija B_k odgovaraju tački spoja dva linearna segmenta krive magnetisanja. Gustina magnetske energije lokalizovane u vazdušnom procepu iznosi

$$w_{m0} = \frac{1}{2}B_0 H_0 = 71,36\ \frac{\text{kJ}}{\text{m}^3}\,. \tag{41.7}$$

Konačno, tražena energija utrošena za uspostavljanje magnetskog polja u datom magnetskom kolu je

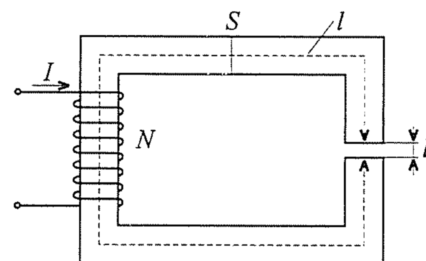
$$W_m = w_m Sl + w_{m0} S_0 l_0 = 45,9\ \text{mJ}\,. \tag{41.8}$$



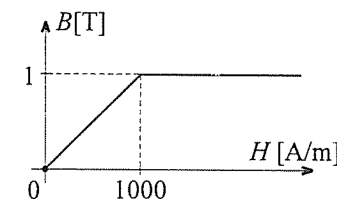
Slika 41.4.

Slika 41.5.

42. Dimenzije magnetskog kola prikazanog na slici 42.1 su $S = 5$ cm^2, $l = 250$ mm i $l_0 = 1$ mm. Namotaj na jezgru ima $N = 500$ zavojaka, a u tom namotaju postoji stalna struja jačine $I = 5$ A. Karakteristika magnetisanja materijala od koga je načinjeno jezgro može se aproksimirati sa dva pravolinijska dela, kao što je prikazano na slici 42.2. Rasipni magnetski fluks se može zanemariti. Izračunati jačinu magnetskog polja u jezgru i vazdušnom procepu i magnetsku energiju lokalizovanu u procepu. (*Z921020*)

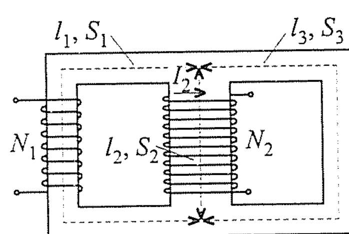


Slika 42.1.

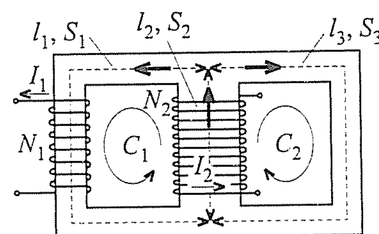


Slika 42.2.

REZULTAT:
Primenjujući postupak iz prethodnoga zadatka, za jačinu magnetskog polja u jezgru i procepu dobijamo $H = 6,82$ kA/m i $H_0 = 795$ kA/m, respektivno. Magnetska energija sadržana u procepu iznosi $W_{m0} = 0,2$ J.



Slika 43.1.



Slika 43.2.

43. Dimenzije magnetskog kola sa slike 43.1 su $l_1 = l_3 = 300$ mm, $l_2 = 100$ mm, $S_1 = S_3 = 20\ \mathrm{cm}^2$ i $S_2 = 40\ \mathrm{cm}^2$, a brojevi zavojaka namotaja su $N_1 = 2000$ i $N_2 = 5000$. Karakteristika magnetisanja materijala od koga je načinjeno jezgro se može aproksimirati izlomljenom linijom prikazanom na slici 42.2. U drugom namotaju je uspostavljena stalna struja jačine $I_2 = 0,1$ A. Magnetsko rasipanje se može zanemariti. (a) Kolika treba da bude jačina struje prvog namotaja da bi u grani sa tim namotajem jačina magnetskog polja bila jednaka nuli? (b) Kolika je pri tome ukupna magnetska energija magnetskog kola? (*Z930831*)

REŠENJE:

(a) Orijentišimo grane magnetskog kola kao na slici 43.2. Iz prvog Kirhofovog zakona za magnetska kola[3] sledi

$$B_1 S_1 - B_2 S_2 + B_3 S_3 = 0\ . \tag{43.1}$$

dok drugi Kirhofov zakon za magnetska kola, primenjen na puteve C_1 i C_2 prikazane na slici 43.2, daje

$$H_2 l_2 + H_1 l_1 = N_1 I_1 + N_2 I_2\ , \tag{43.2}$$

$$H_2 l_2 + H_3 l_3 = N_2 I_2\ . \tag{43.3}$$

Po uslovu zadatka je $H_1 = 0$, odakle je $B_1 = 0$ i $B_2 = B_3/2$ [iz (43.1)]. Kako je $B_2 < B_3$, to zasićenje može nastupiti samo u grani 3. Pretpostavimo da je to zasićenje zaista dostignuto, odnosno da je $B_3 = 1$ T. Tada je $B_2 = 0,5$ T i $H_2 = 500$ A/m (sa karakteristike magnetisanja). Sada iz jednačine (43.3) dobijamo $H_3 = 1500$ A/m > 1000 A/m. Dakle, pretpostavka (o dostignutom zasićenju u grani 3) je tačna. Konačno iz jednačine (43.2) sledi $I_1 = -225$ mA.

(b) Gustine magnetske energije u pojedinim granama kola su

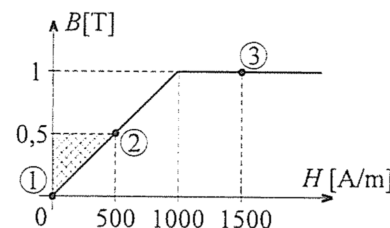
$$w_{\mathrm{m}1} = 0\ , \qquad w_{\mathrm{m}2} = \int_0^{B_2} H\,\mathrm{d}B = \frac{1}{2} B_2 H_2 = 125\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}\ ,$$

[3] Kirhofovi zakoni za magnetska kola daju jednačine analogne jednačinama napisanim po Kirhofovim zakonima za električna kola. Dobijaju se iz dve osnovne integralne jednačine za stalno magnetsko polje, zanemarujući pri tome rasipni magnetski fluks i smatrajući da je magnetsko polje konstantnog intenziteta u pojedinim granama kola.

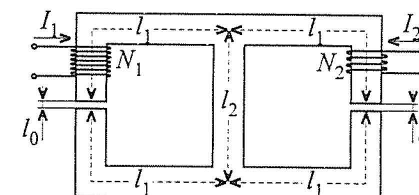
$$w_{\mathrm{m}3} = \int_0^{B_3} H\,\mathrm{d}B = \frac{1}{2} H_\mathrm{m} B_\mathrm{m} = 500\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}\ , \tag{43.4}$$

gde su $H_\mathrm{m} = 1000$ A/m i $B_\mathrm{m} = 1\ T$ jačina magnetskog polja i magnetska indukcija koji odgovaraju granici linearnog dela i oblasti zasićenja na karakteristici magnetisanja. Gustine energije u granama 2 i 3 srazmerne su odgovarajućim šrafiranim površinama trouglova na slici 43.3. Ukupna energija magnetskog kola je

$$W_\mathrm{m} = w_{\mathrm{m}1} S_1 l_1 + w_{\mathrm{m}2} S_2 l_2 + w_{\mathrm{m}3} S_3 l_3 = 350\ \mathrm{mJ}\ . \tag{43.5}$$



Slika 43.3.



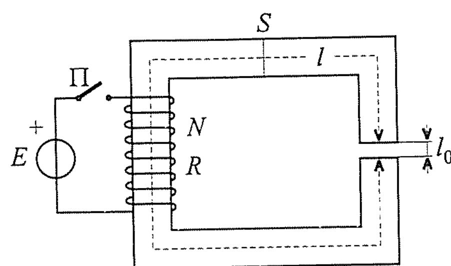
Slika 44.1.

44. Za magnetsko kolo prikazano na slici 44.1 je $l_0 = 0,2\pi$ mm, $l_1 = 10$ cm i $l_2 = 5$ cm, namotaji imaju $N_1 = 1000$, odnosno $N_2 = 500$ zavojaka, a površina poprečnog preseka svake grane kola je $S = 2\ \mathrm{cm}^2$. U levom namotaju postoji stalna struja jačine $I_1 = 1$ A. Idealizovana karakteristika magnetisanja materijala od koga je načinjeno jezgro je prikazana na slici 42.2. Magnetsko rasipanje se zanemaruje. Kolika treba da bude jačina struje I_2 (u odnosu na referentni smer prikazan na slici) da bi magnetska indukcija u desnom procepu bila jednaka nuli? (*Z910518*)

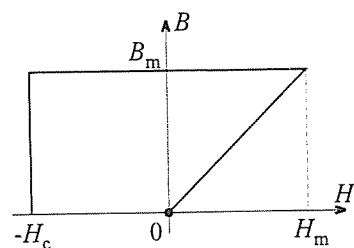
REZULTAT:

Jačina struje u desnom namotaju je $I_2 = -0,2$ A.

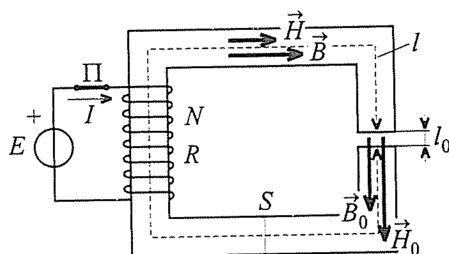
45. Feromagnetsko jezgro, prikazano na slici 45.1, ima površinu poprečnog preseka $S = 1\ \mathrm{cm}^2$, srednju dužinu $l = 10$ cm i širinu vazdušnog procepa $l_0 = 1$ mm. Karakteristika prvobitnog magnetisanja materijala od koga je načinjeno jezgro može se smatrati linearnom, nagiba $B_\mathrm{m}/H_\mathrm{m} = 0,001$ H/m, kao što je prikazano na slici 45.2. Karakteristika razmagnetisavanja materijala se može aproksimirati sa dva pravolinijska segmenta, pri čemu je koercitivno polje $H_c = B_\mathrm{m}/(0,001\ \mathrm{H/m})$. Broj zavojaka namotaja je $N = 1000$, otpornost namotaja je $R = 100\ \Omega$, a elektromotorna sila generatora je $E = 50$ V. Jezgro je nenamagnetisano, a prekidač Π otvoren. Prekidač Π se zatim zatvori, a posle uspostavljanja stacionarnog stanja prekidač se otvori. Izračunati magnetsku indukciju u procepu u poslednjem stacionarnom stanju – kada je prekidač otvoren. Zanemariti magnetsko rasipanje. (*Z910409*)



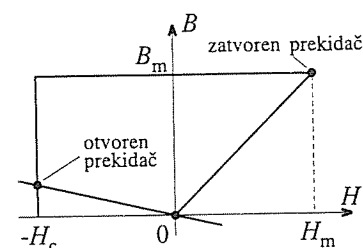
Slika 45.1.



Slika 45.2.



Slika 45.3.



Slika 45.4.

REŠENJE:
Kada se prekidač Π zatvori, jačina struje namotaja je

$$I = \frac{E}{R} = 0,5\ \mathrm{A}\,. \tag{45.1}$$

Zanemarujući magnetsko rasipanje, magnetska indukcija u jezgru, B, jednaka je indukciji u procepu, B_0 (slika 45.3). Na osnovu uopštenog Amperovog zakona dobijamo

$$Hl + H_0 l_0 = NI\,, \tag{45.2}$$

gde su H i H_0 jačine magnetskog polja u jezgru i vazdušnom procepu, respektivno. S obzirom da je karakteristika prvobitnog (početnog) magnetisanja linearna, možemo pisati

$$B = \mu_a H\,, \qquad \mu_a = \frac{B_m}{H_m} = 0,001\ \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \tag{45.3}$$

(μ_a je tzv. prvobitna permeabilnost materijala). Osim toga, imamo $B_0 = \mu_0 H_0$. Iz ovih jednačina sledi

$$B = NI\left(\frac{l}{\mu_a} + \frac{l_0}{\mu_0}\right)^{-1} = 0,558\ \mathrm{T} = B_m\,, \tag{45.4}$$

prema oznakama sa slike 45.2.

Kada se prekidač otvori, uopšteni Amperov zakon daje

$$Hl + H_0 l_0 = 0\,, \tag{45.5}$$

pri čemu je i dalje $B = B_0 = \mu_0 H_0$. Odavde je

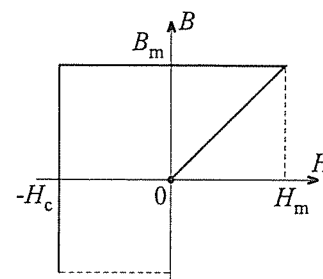
$$Hl + B\frac{l_0}{\mu_0} = 0 \tag{45.6}$$

(jednačina radne prave za ovo stacionarno stanje). Za $B = B_m = 0,558$ T, po ovoj jednačini imamo

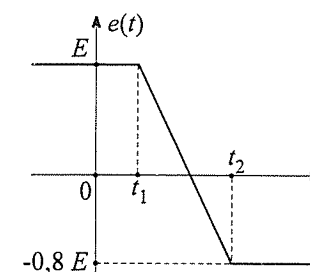
$$H = -4440\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} < -H_c \qquad \left(H_c = \frac{0,558\ \mathrm{T}}{0,001\ \mathrm{H/m}} = 558\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right)\,, \tag{45.7}$$

pa radna prava seče karakteristiku razmagnetisavanja na vertikalnom segmentu (slika 45.4). Stoga je $H = -H_c = -558$ A/m i $B = 70$ mT. Tražena indukcija u procepu je $B_0 = 70$ mT.

46. Posmatra se magnetsko kolo sa slike 45.1. Brojni podaci za S, l, l_0, N i R su dati u tekstu prethodnoga zadatka. Karakteristika prvobitnog magnetisanja feromagnetskog materijala jezgra se može smatrati linearnom, nagiba $B_m/H_m = 0,001$ H/m. Karakteristika razmagnetisavanja i ponovnog magnetisanja u suprotnom smeru se može prikazati kao na slici 46.1, pri čemu je koercitivno polje $H_c = B_m/(0,001\ \mathrm{H/m})$. Jezgro je nenamagnetisano, a prekidač Π otvoren. Zatvaranjem prekidača, u trenutku $t = 0$, uključuje se generator elektromotorne sile e, koja je predstavljena na slici 46.2, pri čemu je $E = 50$ V. Smatrajući da se do trenutka t_1, a zatim i do trenutka t_2, uspostavljaju odgovarajuća stacionarna stanja i zanemarujući magnetsko rasipanje, izračunati magnetsku energiju lokalizovanu u vazdušnom procepu u stacionarnom stanju uspostavljenom posle trenutka t_2. (*Z940521*)



Slika 46.1.

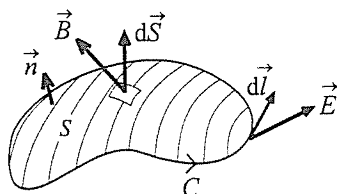


Slika 46.2.

REZULTAT:
Tražena energija iznosi $W_{m0} = 7,44$ mJ.

47. Koliki je linijski integral vektora jačine električnog polja duž konture C u (a) elektrostatičkom polju, (b) stacionarnom strujnom polju, (c) kvazistacionarnom

polju i (d) brzo promenljivom polju? (e) Kako glasi odgovarajuća jednačina u analizi električnih kola? (*P960613*)



Slika 47.1.

REŠENJE:
(a)-(b) Cirkulacija vektora jačine električnog polja duž proizvoljne konture C u elektrostatičkom polju i stacionarnom strujnom polju jednaka je nuli, tj.

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \,. \tag{47.1}$$

(c)-(d) U vremenski promenljivom elektromagnetskom polju je

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \,, \tag{47.2}$$

bilo da se radi o kvazistacionarnom (sporo promenljivom) ili brzo promenljivom polju. U jednačini (47.2), koja predstavlja Faradejev zakon elektromagnetske indukcije (prvu Maksvelovu jednačinu), Φ je magnetski fluks kroz konturu C, tj. fluks vektora magnetske indukcije kroz proizvoljnu površ S oslonjenu na konturu C, pri čemu su orijentacije konture i površi vezane pravilom desne zavojnice (slika 47.1).

(e) Odgovarajuća jednačina u teoriji električnih kola je drugi Kirhofov zakon,

$$\sum_{k=1}^{N} u_k = 0 \,, \tag{47.3}$$

za proizvoljan zatvoreni put u kolu, koji sadrži N grana, gde su u_k ($k = 1, 2, \ldots, N$) naponi tih grana. Ovi naponi mogu biti stalni, kada se označavaju sa U_k, ili vremenski promenljivi.

48. Posmatra se proizvoljna zatvorena putanja C u vremenski promenljivom polju. Koliki je linijski integral vektora jačine (a) električnog polja koje potiče od viška naelektrisanja, (b) indukovanog električnog polja i (c) ukupnog električnog polja, po putanji C? (*P960904*)

REŠENJE:
Označimo sa $\boldsymbol{E}_q$ i $\boldsymbol{E}_{\text{ind}}$ vektore jačine električnog polja usled viška naelektrisanja i indukovanog električnog polja, respektivno. Ukupno polje, $\boldsymbol{E}$, možemo napisati kao

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_q + \boldsymbol{E}_{\text{ind}} \,. \tag{48.1}$$

Linijski integrali ovih vektora duž proizvoljne konture C iznose

$$\oint_C \boldsymbol{E}_q \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \,. \tag{48.2}$$

$$\oint_C \boldsymbol{E}_{\text{ind}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \,, \tag{48.3}$$

$$\oint_C (\boldsymbol{E}_q + \boldsymbol{E}_{\text{ind}}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \,, \tag{48.4}$$

gde je Φ magnetski fluks kroz konturu C.

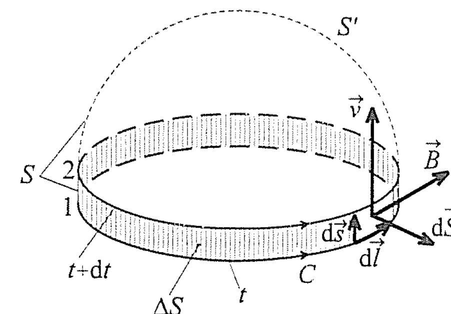
49. Napisati Faradejev zakon elektromagnetske indukcije u takvom obliku da su posebno izdvojene elektromotorne sile statičke i dinamičke indukcije. (*P940130*)

REŠENJE:
Traženi oblik Faradejevog zakona je

$$e_{\text{ind}} = \oint_C \boldsymbol{E}_{\text{ind}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \underbrace{-\int_S \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}_{e_{\text{ind(st)}}} + \underbrace{\oint_C (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}_{e_{\text{ind(din)}}} \,, \tag{49.1}$$

gde je $\boldsymbol{v}$ brzina kretanja pojedinih tačaka konture C, a $e_{\text{ind(st)}}$, $e_{\text{ind(din)}}$ i e_{ind} su elektromotorne sile statičke, dinamičke i ukupne (mešovite) elektromagnetske indukcije, respektivno.

50. Kontura C se kreće i/ili deformiše u stalnom magnetskom polju. Na osnovu fluksa koji "prebriše" kontura, dokazati da je u tome slučaju $\oint_C (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$. (*P950903*)



Slika 50.1.

REŠENJE:
Neka je $\boldsymbol{v}$ brzina elementa $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ konture C. U intervalu vremena $\mathrm{d}t$ taj element pređe put $\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$ (slika 50.1). Stoga je

$$e_{\text{ind(din)}} = \oint_C (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} =$$

$$\frac{1}{\mathrm{d}t} \oint_C (\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{1}{\mathrm{d}t} \oint_C \boldsymbol{B} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \mathrm{d}\boldsymbol{s}) = \frac{1}{\mathrm{d}t} \oint_C \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \,, \tag{50.1}$$

pri čemu je upotrebljen identitet $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b}$. Poslednji integral u (50.1) predstavlja magnetski fluks kroz traku ΔS koju kontura "prebriše" za vreme $\mathrm{d}t$ (šrafiranu traku između položaja 1 i 2 konture na slici 50.1). Uočimo površ S' oslonjenu na konturu C u položaju 2 i površ S datu sa

$$S = S' \cup \Delta S \,. \tag{50.2}$$

Jasno je da se površ S oslanja na konturu C u položaju 1. Pri određivanju magnetskog fluksa u trenutku t (Φ), konturi C možemo pridružiti površ S, a fluks u trenutku $t + \mathrm{d}t$ (Φ') možemo računati kroz površ S'. Priraštaj fluksa u intervalu vremena od t do $t + \mathrm{d}t$,

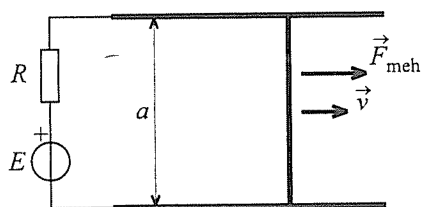
$$\mathrm{d}\Phi = \Phi' - \Phi \,, \tag{50.3}$$

stoga je jednak fluksu kroz traku ΔS pomnoženom sa -1, pa je iz (50.1)

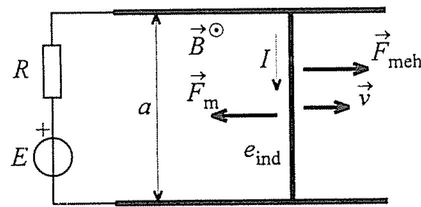
$$e_{\mathrm{ind(din)}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \,, \tag{50.4}$$

što je i trebalo dokazati.

51. Provodna šipka, dužine $a = 2$ m, klizi bez trenja stalnom brzinom $v = 10$ m/s po provodnim šinama, pod dejstvom stalne mehaničke sile $F_{\mathrm{meh}} = 10$ N, kao što je prikazano na slici 51.1. Šipka je normalna na šine, a ceo sistem se nalazi u homogenom stalnom magnetskom polju, nepoznate indukcije B, normalnom na ravan koju obrazuju šipka i šine. Za šine je priključen realan naponski generator, elektromotorne sile $E = 10$ V i unutrašnje otpornosti $R = 2\ \Omega$. Snaga Džulovih gubitaka u generatoru manja je od 100 W. Otpornosti šipke i šina, kao i elektromotorna sila samoindukcije su zanemarljivo mali. Izračunati (a) intenzitet magnetske indukcije, B, i (b) snagu realnog naponskog generatora. (*Z900921*)



Slika 51.1.



Slika 51.2.

REŠENJE:
Usvojimo referentni smer vektora magnetske indukcije $\boldsymbol{B}$ kao na slici 51.2. Pošto se šipka kreće ravnomernom brzinom, mehanička sila $\boldsymbol{F}_{\mathrm{meh}}$ i magnetska sila $\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}$, koje deluju na šipku, se uravnotežavaju, pa je

$$F_{\mathrm{m}} = F_{\mathrm{meh}} \tag{51.1}$$

(videti sliku 51.2). Šipka se nalazi u homogenom magnetskom polju, pa je magnetska sila data izrazom (13.1), gde je I jačina struje u šipki, a $\boldsymbol{l}$ vektor dužine šipke ($|\boldsymbol{l}| = a$), čiji se smer poklapa sa referentnim smerom struje. S obzirom na to da su vektori $\boldsymbol{l}$ i $\boldsymbol{B}$ međusobno normalni, imamo

$$F_{\mathrm{m}} = IaB \,, \tag{51.2}$$

u odnosu na referentni smer sa slike 51.2.

Zbog kretanja šipke u magnetskom polju, u njoj se javlja elektromotorna sila dinamičke indukcije, koja iznosi

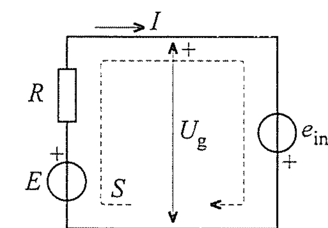
$$e_{\mathrm{ind}} = e_{\mathrm{ind(din)}} = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{l} = vBa \,, \tag{51.3}$$

prema referentnom smeru koji se poklapa sa referentnim smerom struje I. Iz drugog Kirhofovog zakona za ekvivalentno električno kolo sa slike 51.3 sledi

$$E - RI + e_{\mathrm{ind}} = 0 \,, \tag{51.4}$$

pri čemu su, prema uslovu zadatka, zanemarene otpornosti šipke i šina, kao i elektromotorna sila samoindukcije. Zamenom izraza za jačinu struje iz (51.2) i (51.1) i izraza za indukovanu elektromotornu silu (51.3) u relaciju (51.4), dobijamo sledeću kvadratnu jednačinu za indukciju B:

$$a^2vB^2 + aEB - RF_{\mathrm{meh}} = 0 \,. \tag{51.5}$$



Slika 51.3.

Rešenja ove jednačine, za zadate brojne vrednosti, glase: $B' = -1$ T i $B'' = 0{,}5$ T. U prvom slučaju dobijamo $e'_{\mathrm{ind}} = -20$ V, $I' = -5$ A, pa snaga Džulovih gubitaka u realnom naponskom generatoru elektromotorne sile E i unutrašnje otpornosti R iznosi

$$P'_R = RI'^2 = 50 \text{ W} \,. \tag{51.6}$$

U drugom slučaju je $e''_{\mathrm{ind}} = 10$ V, $I'' = 10$ A i $P''_R = RI''^2 = 200$ W. Prema uslovu zadatka ($P_R < 100$ W), dolazi u obzir samo prvo rešenje, tj. $B = -1$ T. Tada je snaga koju razvija realni naponski generator

$$P_{\mathrm{g}} = \underbrace{(E - RI)}_{U_{\mathrm{g}}} I = -e_{\mathrm{ind}} I = -100 \text{ W} \,, \tag{51.7}$$

gde je U_{g} napon toga generatora (videti sliku 51.3). Generator (E, R) se ponaša kao prijemnik.

Snaga mehaničkog rada u ovome sistemu iznosi

$$P_{\mathrm{meh}} = F_{\mathrm{meh}} v = 100 \text{ W} \,, \tag{51.8}$$

što je u skladu sa zakonom održanja snage.

52. Veoma dugačak solenoid kružnog poprečnog preseka, poluprečnika a i podužne gustine zavojaka N', ispunjen je linearnim feromagnetskim materijalom, relativne permeabilnosti μ_{r}. U namotaju solenoida postoji struja jačine $i = I_{\mathrm{m}} \cos \omega t$.

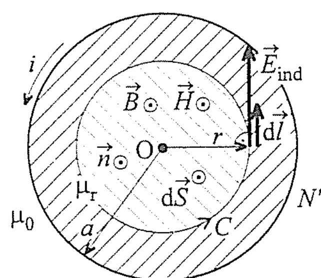
Okolna sredina je vazduh. Zanemarujući magnetsko polje struja indukovanih u jezgru solenoida, odrediti izraz za trenutni intenzitet vektora jačine indukovanog električnog polja u solenoidu. (*P960917*)

REŠENJE:
Magnetsko polje van solenoida ne postoji, dok je u solenoidu homogeno i aksijalno (slika 52.1), pri čemu zanemarujemo magnetsko polje struja indukovanih u feromagnetskom jezgru. Na osnovu uopštenog Amperovog zakona je

$$H = N'i \tag{52.1}$$

u solenoidu, odakle je magnetska indukcija u solenoidu

$$B = \mu_r \mu_0 N' I_m \cos \omega t \,. \tag{52.2}$$



Slika 52.1.

Zbog simetrije, indukovano električno polje ($\boldsymbol{E}_{ind}$) je cirkularno (linije vektora $\boldsymbol{E}_{ind}$ su krugovi) i E_{ind} = const na krugu poluprečnika r (slika 52.1). [Radi se o pojavi statičke elektromagnetske indukcije, tj. $\boldsymbol{E}_{ind} = \boldsymbol{E}_{ind(st)}$.] Primenom Faradejevog zakona elektromagnetske indukcije,

$$\oint_C \boldsymbol{E}_{ind} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} \,, \tag{52.3}$$

na kružnu konturu C poluprečinka $r \leq a$, dobijamo

$$E_{ind}\, 2\pi r = -\frac{d}{dt}(B\pi r^2) \,. \tag{52.4}$$

Odavde je trenutni algebarski intenzitet vektora jačine indukovanog električnog polja u solenoidu, na odstojanju r od ose solenoida,

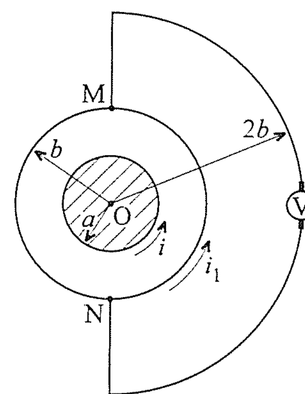
$$E_{ind} = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt} = \frac{1}{2}\mu_r \mu_0 \omega N' I_m r \sin \omega t \quad (r \leq a) \,, \tag{52.5}$$

prema referentnom smeru sa slike 52.1.

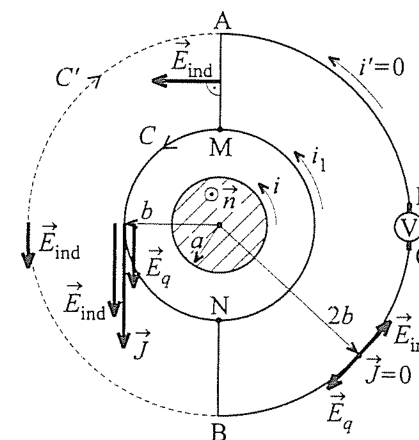
53. Jezgro vrlo dugačkog solenoida je kružno, poluprečnika a, a u njemu postoji prostoperiodičan magnetski fluks $\Phi = \Phi_m \cos \omega t$. Magnetsko polje struja indukovanih u jezgru se može zanemariti. Odrediti izraz za vektor jačine indukovanog električnog polja na odstojanju $b = 2a$ od ose solenoida. (*P920920*)

REZULTAT:
Traženi vektor jačine indukovanog električnog polja je cirkularan, intenziteta $E_{ind} = \omega \Phi_m \sin \omega t/(4\pi a)$, u odnosu na referentni smer vezan pravilom desne zavojnice sa smerom orta normale prema kojoj je sračunat magnetski fluks Φ.

54. Poprečni presek vrlo dugačkog solenoida je krug poluprečnika a = 5 cm (slika 54.1). Jezgro solenoida je od linearnog materijala, relativne permeabilnosti μ_r = 1000, a podužna gustina zavojaka je N' = 1000 zavojaka/m. U zavojcima postoji struja jačine $i(t) = 2\sqrt{2}\cos 1000t$ A, gde je t u sekundama. Solenoid je obuhvaćen koaksijalnim kružnim zavojkom poluprečnika b = 10 cm, od žice površine poprečnog preseka S = 1 mm^2 i specifične provodnosti σ = 56 MS/m. Za dijametralne tačke zavojka, M i N, vezan je voltmetar, pomoću provodnika oblika prikazanog na slici 54.1. Voltmetar ima veoma veliku impedansu, a baždaren je u efektivnim vrednostima. Zanemarujući magnetsko polje struja indukovanih u zavojku i jezgru, izračunati (a) trenutnu jačinu struje u zavojku poluprečnika b, $i_1(t)$, i (b) pokazivanje voltmetra. (*Z910903*)



Slika 54.1.



Slika 54.2.

REŠENJE:
(a) Vektor magnetske indukcije solenoida je određen u zadatku 52. Označimo sa C konturu duž ose zavojka postavljenog oko solenoida (slika 54.2). Primenom Faradejevog zakona elektromagnetske indukcije na ovu konturu (videti zadatke 52 i 53), za algebarski intenzitet vektora jačine indukovanog električnog polja u zavojku dobijamo

$$E_{ind} = -\frac{1}{2\pi b}\frac{d\Phi}{dt} \,, \qquad \Phi = \pi \mu_r \mu_0 N' a^2 i \,, \tag{54.1}$$

prema referentnom smeru koji se poklapa sa smerom konture C, pri čemu Φ označava magnetski fluks kroz poprečni presek solenoida i zanemareno je magnetsko polje struja indukovanih u zavojku i jezgru solenoida.

Kako je impedansa voltmetra veoma velika, to struju u priključnim provodnicima voltmetra možemo zanemariti u odnosu na struju kružnog zavojka.[4] Vektor

[4]U priključnim provodnicima voltmetra postoji struja vrlo malog intenziteta, potrebna kako bi bilo pokazivanja instrumenta.

gustine struje u kružnom zavojku je

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} = \sigma(\boldsymbol{E}_q + \boldsymbol{E}_{\text{ind}}) , \qquad (54.2)$$

gde je σ specifična provodnost zavojka. Vektor $\boldsymbol{J}$ je cirkularan (strujnice su duž žice) i konstantnog intenziteta duž zavojka (što sledi iz jednačine kontinuiteta), a takav je i vektor $\boldsymbol{E}_{\text{ind}}$. Stoga, pošto je $\sigma = \text{const}$ u zavojku, iz (54.2) sledi da i vektor jačine električnog polja usled akumulacije naelektrisanja, $\boldsymbol{E}_q$, mora biti cirkularan i konstantnog intenziteta duž ose zavojka. Usvojimo referentni smer za vektor $\boldsymbol{E}_q$ kao na slici 54.2. Električno polje $\boldsymbol{E}_q$ je konzervativnoga karaktera, pa integralna jednačina (48.2), primenjena na konturu C duž zavojka, daje

$$E_q 2\pi b = 0 , \qquad (54.3)$$

odakle je $E_q = 0$. Stoga imamo

$$J = \sigma E_{\text{ind}} , \qquad (54.4)$$

pa je tražena jačina struje u zavojku

$$i_1 = JS = -\frac{\sigma \mu_r \mu_0 N' a^2 S}{2b} \frac{di}{dt} = 4976 \sin 1000t \text{ A} , \qquad (54.5)$$

gde je S površina poprečnog preseka žice zavojka.

(b) Razlika potencijala priključaka voltmetra (tačaka P i Q na slici 54.2) je

$$V_P - V_Q = \int_P^Q \boldsymbol{E}_q \cdot d\boldsymbol{l} . \qquad (54.6)$$

Usvojimo za putanju integracije liniju duž žičanih provodnika PMNQ. Tada je

$$V_P - V_Q = \int_P^M \boldsymbol{E}_q \cdot d\boldsymbol{l} + \int_M^N \boldsymbol{E}_q \cdot d\boldsymbol{l} + \int_N^Q \boldsymbol{E}_q \cdot d\boldsymbol{l} . \qquad (54.7)$$

U žičanim segmentima PM i NQ je $\boldsymbol{J} \approx 0$, jer je impedansa voltmetra veoma velika, pa relacija (54.2) daje

$$\boldsymbol{E}_q = -\boldsymbol{E}_{\text{ind}} . \qquad (54.8)$$

Kako imamo i $\boldsymbol{E}_q = 0$ u segmentu MN, to je

$$V_P - V_Q = \int_M^P \boldsymbol{E}_{\text{ind}} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_Q^N \boldsymbol{E}_{\text{ind}} \cdot d\boldsymbol{l} . \qquad (54.9)$$

Imajući u vidu da je rastojanje priključaka voltmetra mnogo manje od poluobima kruga poluprečnika $2b$ i da je vektor $\boldsymbol{E}_{\text{ind}}$ normalan na segmente MA i BN, dobijamo

$$V_P - V_Q \approx \int_A^B \boldsymbol{E}_{\text{ind}} \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{1}{2} \oint_{C'} \boldsymbol{E}_{\text{ind}} \cdot d\boldsymbol{l} \qquad (54.10)$$

(videti sliku 54.2). Konačno, na osnovu Faradejevog zakona elektromagnetske indukcije primenjenog na konturu C', imamo

$$V_P - V_Q = \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi \mu_r \mu_0 N' a^2}{2} \frac{di}{dt} = -9,87\sqrt{2} \sin 1000t \text{ V} , \qquad (54.11)$$

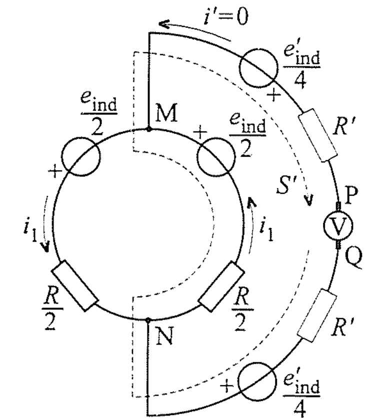
pa je pokazivanje voltmetra 9,87 V.

Zadatak se može rešiti i jednostavnije, na osnovu ekvivalentne električne šeme prikazane na slici 54.3. Na ovoj šemi, e_{ind} i e'_{ind} su indukovane elektromotorne sile u konturama C i C' sa slike 54.2, respektivno, za koje je

$$e_{\text{ind}} = -e'_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} , \qquad (54.12)$$

gde je fluks Φ kroz poprečni presek solenoida dat u (54.1). Elektromotorne sile koje su posledica magnetskog polja indukovanih struja zanemarujemo. Otpornost R kružnog zavojka je data izrazom

$$R = \frac{2\pi b}{\sigma S} , \qquad (54.13)$$



Slika 54.3.

a R' je otpornost žičanog segmenta MP.

U grani sa voltmetrom, koji smatramo idealnim, je

$$i' = 0 , \qquad (54.14)$$

pa Omov zakon za prosto kolo daje

$$i_1 = \frac{e_{\text{ind}}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} . \qquad (54.15)$$

Sabirajući napone duž puta S' sa slike 54.3 imamo

$$V_P - V_Q = \frac{e'_{\text{ind}}}{4} - \frac{R}{2} i_1 + \frac{e_{\text{ind}}}{2} + \frac{e'_{\text{ind}}}{4} = \frac{e'_{\text{ind}}}{2} = \frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dt} . \qquad (54.16)$$

Preporučuje se čitaocu da, kao vežbu, reši zadatak za slučaj kada specifična provodnost dela kružnog zavojka sa slike 54.1 levo od tačaka M i N iznosi $\sigma_1 = 56$ MS/m, a desni deo zavojka ima specifičnu provodnost $\sigma_2 = 14$ MS/m.

55. Tanak kružni disk, poluprečnika a, visine δ ($\delta \ll a$) i specifične provodnosti σ, nalazi se u homogenom prostoperiodičnom magnetskom polju, efektivne vrednosti magnetske indukcije B i kružne učestanosti ω. Vektor $\boldsymbol{B}$ je normalan na

bazise diska. Izvesti izraz za srednju snagu gubitaka usled vihornih struja u disku. Zanemariti magnetsko polje vihornih struja. (*P960613*)

REŠENJE:
Postupkom izloženim u zadatku 52, za trenutni intenzitet vektora jačine indukovanog električnog polja u disku, na odstojanju r od ose diska, dobijamo (slika 55.1)

$$E_{\mathrm{ind}}(r,t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega B r \sin\omega t \,. \tag{55.1}$$

Gustina indukovanih struja u disku (tzv. vihornih struja) data je izrazom (54.4). Prilikom određivanja indukovanog polja zanemareno je magnetsko polje ovih struja.

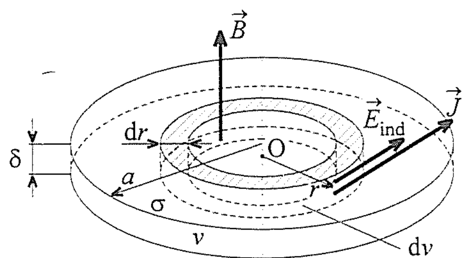
Trenutna snaga gubitaka usled vihornih struja u disku je

$$p_J(t) = \int_v J(r,t)E_{\mathrm{ind}}(r,t)\,\mathrm{d}v = \int_{r=0}^{a} \sigma E_{\mathrm{ind}}^2(r,t)\underbrace{2\pi r\,\mathrm{d}r\delta}_{\mathrm{d}v} =$$

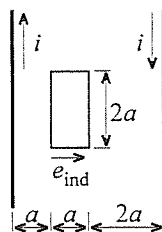
$$\pi\sigma\omega^2 B^2\delta\sin^2\omega t\int_0^a r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}\sigma\omega^2B^2a^4\delta\sin^2\omega t\,, \tag{55.2}$$

gde je $\mathrm{d}v$ zapremina diska poluprečnika r, širine $\mathrm{d}r$ i visine δ (videti sliku 55.1). Traženi izraz za srednju snagu gubitaka u disku glasi

$$P_J = \frac{\pi}{8}\sigma\omega^2B^2a^4\delta\,. \tag{55.3}$$



Slika 55.1.

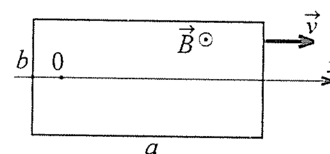


Slika 56.1.

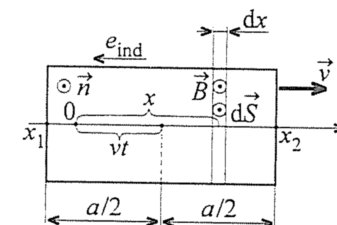
56. U dva vrlo dugačka, paralelna, prava provodnika, prikazana na slici 56.1, postoji prostoperiodična struja, jačine $i(t) = I_{\mathrm{m}}\cos\omega t$. Provodnici se nalaze u vakuumu, na međusobnom rastojanju $4a$. U ravni ovih provodnika nalazi se kontura u obliku pravougaonika, dužina stranica a i $2a$, kao na slici 56.1. Odrediti izraz za trenutni intenzitet elektromotorne sile indukovane u konturi. Zanemariti elektromotornu silu samoindukcije. (*Z890926*)

REZULTAT:
Izraz za elektromotornu silu u konturi, u odnosu na referentni smer označen na slici 56.1, glasi: $e_{\mathrm{ind}}(t) = -\mu_0\omega a I_{\mathrm{m}}\ln 3\sin\omega t/\pi$.

57. Pravougaoni zavojak prikazan na slici 57.1, dužina stranica a i b, kreće se u smeru x-ose konstantnom brzinom v u nehomogenom, vremenski promenljivom magnetskom polju, indukcije $B(x,t) = B_0\cos(\pi x/a)\cos(2\pi vt/a)$. U trenutku $t = 0$ centar konture se nalazi u koordinatnom početku ($x = 0$). Odrediti izraz za elektromotornu silu indukovanu u konturi. (*Z920825*)



Slika 57.1.



Slika 57.2.

REŠENJE:
Kako se zavojak kreće u vremenski promenljivom magnetskom polju, to se radi o mešovitoj (složenoj) elektromagnetskoj indukciji. Indukovanu elektromotornu silu u zavojku odredićemo kao

$$e_{\mathrm{ind}} = e_{\mathrm{ind(m)}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\,. \tag{57.1}$$

gde je Φ magnetski fluks kroz zavojak. Ovaj fluks, u proizvoljnom trenutku $t \geq 0$, možemo izračunati na sledeći način (slika 57.2):

$$\Phi(t) = \int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{x_1}^{x_2} B(x,t)\,\mathrm{d}S = \int_{x_1}^{x_2} B_0\cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{2\pi vt}{a}\,b\,\mathrm{d}x$$

$$= bB_0\cos\frac{2\pi vt}{a}\int_{x_1}^{x_2}\cos\frac{\pi x}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{abB_0}{\pi}\cos\frac{2\pi vt}{a}\left(\sin\frac{\pi x_2}{a} - \sin\frac{\pi x_1}{a}\right)\,, \tag{57.2}$$

gde je $\mathrm{d}S$ površina trake dužine b i širine $\mathrm{d}x$, šrafirane na slici 57.2, a x_1 i x_2 su koordinate leve i desne ivice zavojka, respektivno, u trenutku t, date sa

$$x_1 = -\frac{a}{2} + vt\,, \qquad x_2 = \frac{a}{2} + vt \tag{57.3}$$

[po uslovu zadatka, u trenutku $t = 0$ je $(x_1 + x_2)/2 = 0$]. Sada je, uz upotrebu jednostavnih trigonometrijskih transformacija,

$$\Phi(t) = \frac{abB_0}{\pi}\cos\frac{2\pi vt}{a}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi vt}{a}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi vt}{a}\right)\right] =$$

$$\frac{abB_0}{\pi}\cos\frac{2\pi vt}{a}\,2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi vt}{a} = \frac{abB_0}{\pi}\left(\cos\frac{\pi vt}{a} + \cos\frac{3\pi vt}{a}\right)\,. \tag{57.4}$$

Konačno, indukovana elektromotorna sila u trenutku t iznosi

$$e_{\rm ind}(t) = vbB_0\left(\sin\frac{\pi vt}{a} + 3\sin\frac{3\pi vt}{a}\right), \qquad (57.5)$$

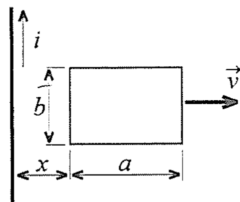
prema referentnom smeru prikazanom na slici 57.2.

58. U veoma dugačkom pravolinijskom provodniku na slici 58.1 postoji prostoperiodična struja, jačine $i(t) = I_{\rm m}\cos\omega t$. Pravougaona kontura, dužina stranica a i b, kreće se u ravni koja sadrži provodnik konstantnom brzinom v. U trenutku $t = 0$ leva stranica konture je na odstojanju $x = a$ od provodnika. Sredina je vakuum. Odrediti elektromotornu silu indukovanu u konturi. (*Z900612*)

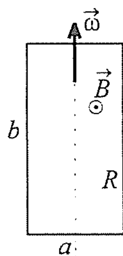
REZULTAT:
Elektromotorna sila mešovite indukcije je

$$e_{\rm ind}(t) = \frac{\mu_0 b I_{\rm m}}{2\pi}\left[\omega\ln\frac{2a+vt}{a+vt}\sin\omega t + \frac{av}{(a+vt)(2a+vt)}\cos\omega t\right],$$

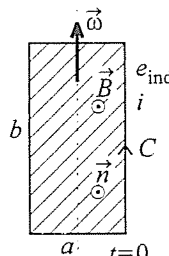
prema refentnom smeru koji se slaže sa smerom kretanja kazaljke na časovniku.



Slika 58.1.



Slika 59.1.



Slika 59.2.

59. Pravougaoni zavojak, dužina stranica a i b, okreće se konstantnom ugaonom brzinom ω u homogenom prostoperiodičnom magnetskom polju, indukcije $B(t) = B_{\rm m}\sin\omega t$, kao što je prikazano na slici 59.1. Vektor magnetske indukcije je normalan na ravan crteža, a u trenutku $t = 0$ zavojak leži u ravni crteža. Otpornost konture je R, a pojava samoindukcije u zavojku se može zanemariti. Odrediti izraze za (a) trenutnu jačinu struje u zavojku i (b) srednju snagu Džulovih gubitaka u zavojku. (*Z920516*)

REŠENJE:
(a) Usvojimo orijentaciju konture (zavojka) kao na slici 59.2. Pretpostavimo da je na slici 59.2 predstavljen položaj zavojka u trentku $t = 0$ (smer vektora $\boldsymbol{B}$ poklapa

se sa smerom orta normale na površ zavojka, $\boldsymbol{n}$). Prema slici 59.3, magnetski fluks kroz zavojak je

$$\Phi = \boldsymbol{B}\cdot ab\boldsymbol{n} = Bab\cos\alpha. \qquad (59.1)$$

Ugao α se menja prema jednačini

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega t, \qquad (59.2)$$

gde je $\alpha_0 = 0$ po uslovu zadatka. Tako imamo

$$\Phi(t) = abB_{\rm m}\sin\omega t\cos\omega t = \frac{abB_{\rm m}}{2}\sin 2\omega t, \qquad (59.3)$$

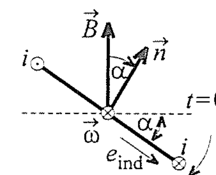
pa je elektromotorna sila (mešovite elektromagnetske indukcije) u zavojku

$$e_{\rm ind}(t) = -\frac{{\rm d}\Phi(t)}{{\rm d}t} = -\omega abB_{\rm m}\cos 2\omega t. \qquad (59.4)$$

Jačina struje u zavojku je

$$i(t) = \frac{e_{\rm ind}}{R} = \frac{\omega abB_{\rm m}}{R}\cos(2\omega t + \pi), \qquad (59.5)$$

pri čemu je zanemarena elektromotorna sila samoindukcije u zavojku. Uočimo da je učestanost indukovane struje dva puta veća od učestanosti magnetske indukcije $\boldsymbol{B}(t)$.



Slika 59.3.

(b) Efektivna vrednost struje u kolu je

$$I = \frac{\omega abB_{\rm m}}{\sqrt{2}R}, \qquad (59.6)$$

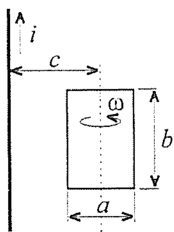
pa srednja snaga Džulovih gubitaka u zavojku iznosi

$$P = RI^2 = \frac{\omega^2 a^2 b^2 B_{\rm m}^2}{2R}. \qquad (59.7)$$

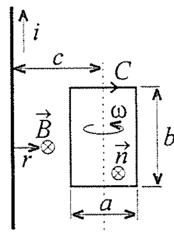
60. Kružni kratko spojeni zavojak načinjen je od otporne žice, dužine $l = 200$ mm i ukupne otpornosti $R = 2\ \Omega$. Zavojak rotira konstantnom ugaonom brzinom oko ose koja se poklapa sa jednim prečnikom zavojka tako da načini $N = 3000$ obrtaja u minutu. Zavojak rotira u homogenom magnetskom polju indukcije $B(t) = 0{,}1\cos 2\pi ft$ T normalne na osu obrtanja, gde je $f = 50$ Hz. U trenutku $t = 0$ vektor $\boldsymbol{B}$ je normalan na ravan zavojka. Izračunati srednju snagu Džulovih gubitaka u zavojku. Zanemariti samoindukciju. (*Z960909*)

REZULTAT:
Uočavajući da je ugaona brzina rotacije zavojka, $w = 2\pi N$ ($N = 50$ obrtaja u sekundi), jednaka kružnoj učestanosti magnetske indukcije, $\omega = 2\pi f$, postupkom izloženim u prethodnome zadatku dobijamo $P = 2{,}5$ mW.

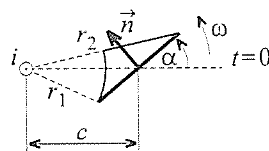
61. U vrlo dugačkom pravolinijskom provodniku, prikazanom na slici 61.1, postoji prostoperiodična struja, jačine $i(t) = I_{\rm m}\cos\omega t$. U blizini provodnika nalazi se pravougaona kontura, dužina stranica a i b, koja se okreće oko svoje ose, paralelne pravolinijskom provodniku i na odstojanju c od tog provodnika, konstantnom ugaonom brzinom ω. U trenutku $t = 0$ ravan pravougaone konture se poklapa sa ravni crteža. Sredina je vazduh. Zanemarujući samoindukciju, odrediti izraz za elektromotornu silu indukovanu u konturi. (*Z910618*)



Slika 61.1.



Slika 61.2.



Slika 61.3.

REŠENJE:
Struja u pravolinijskom provodniku praćena je magnetskim poljem čije su linije kružnice centrirane na osi provodnika. Na odstojanju r od ose provodnika, algebarski intenzitet vektora magnetske indukcije, u odnosu na referentni smer prikazan na slici 61.2, dat je izrazom

$$B(r,t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}\,. \tag{61.1}$$

Orijentišimo pravougaonu konturu kao na slici 61.2. Gledano odozgo, provodnik i kontura u proizvoljnom trenutku vremena, t, vide se kao što je prikazano na slici 61.3, pri čemu je $\alpha = \omega t$. Sa ove slike je očigledno da je fluks vektora $\boldsymbol{B}$ kroz posmatranu pravougaonu konturu isti kao fluks kroz pravougaonu konturu visine b i širine $r_2 - r_1$, koja je koplanarna sa pravolinijskim provodnikom, gde su r_1 i r_2 odstojanja odgovarajućih stranica konture od ose provodnika. Ova odstojanja iznose

$$r_{1,2} = \sqrt{c^2 + \frac{a^2}{4} \mp ac\cos\omega t}\,, \tag{61.2}$$

što dobijamo primenjujući kosinusnu teoremu. Tako je

$$\Phi(t) = \int_{r_1}^{r_2} B(r,t) b\,{\rm d}r = \frac{\mu_0 i(t) b}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}\,. \tag{61.3}$$

Tražena indukovana elektromotorna sila u konturi iznosi

$$e_{\rm ind}(t) = -\frac{{\rm d}\Phi(t)}{{\rm d}t} = \frac{\mu_0\omega b I_{\rm m}}{4\pi}\left[\ln\frac{c^2+\frac{a^2}{4}+ac\cos\omega t}{c^2+\frac{a^2}{4}-ac\cos\omega t}\sin\omega t + \right.$$

$$\left.\frac{ac}{2}\left(\frac{1}{c^2+\frac{a^2}{4}+ac\cos\omega t} + \frac{1}{c^2+\frac{a^2}{4}-ac\cos\omega t}\right)\sin 2\omega t\right]\,. \tag{61.4}$$

62. (a) Kako se preko energije definiše spoljašnja, a kako unutrašnja induktivnost konture? (b) Šta predstavlja količnik sopstvenog fluksa i jačine struje konture? (*P890527*)

REŠENJE:
(a) Spoljašnja i unutrašnja induktivnost konture definišu se kao

$$L_{\rm e} = \frac{2W_{\rm e}}{i^2} \tag{62.1}$$

i

$$L_{\rm i} = \frac{2W_{\rm i}}{i^2}\,, \tag{62.2}$$

respektivno, gde je i jačina struje konture, $W_{\rm e}$ predstavlja magnetsku energiju lokalizovanu u polju izvan provodnika, dok je $W_{\rm i}$ energija sadržana u magnetskom polju unutar provodnika.

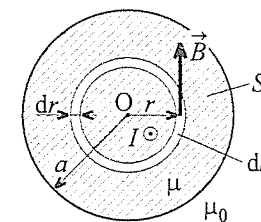
(b) Količnik sopstvenog fluksa kroz konturu, Φ, i jačine struje konture, i, predstavlja spoljašnju induktivnost konture,

$$L_{\rm e} = \frac{\Phi}{i}\,. \tag{62.3}$$

63. Izvesti izraz za podužnu unutrašnju induktivnost veoma dugačkog, pravog provodnika kružnog poprečnog preseka, poluprečnika a i permeabilnosti μ. (*P890411*)

REŠENJE:
Na slici 63.1 je prikazan poprečni presek datog provodnika. Pretpostavimo da u provodniku postoji stalna struja jačine I. Magnetsko polje u provodniku je cirkularno, indukcije na ostojanju r ($r \le a$) od ose provodnika

$$B = \frac{\mu I r}{2\pi a^2} \tag{63.1}$$



Slika 63.1.

(videti zadatak 25). Gustina magnetske energije u provodniku je

$$w_{\rm m} = \frac{B^2}{2\mu}\,, \tag{63.2}$$

pa je podužna magnetska energija lokalizovana u polju unutar provodnika

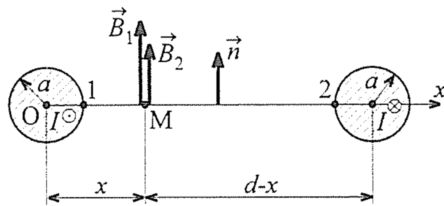
$$W'_{\rm m} = \int_S w_{\rm m}\,{\rm d}S = \int_{r=0}^{a}\frac{B^2(r)}{2\mu}\underbrace{2\pi r\,{\rm d}r}_{{\rm d}S} = \frac{\mu I^2}{4\pi a^4}\int_0^a r^3\,{\rm d}r = \frac{\mu I^2}{16\pi}\,. \tag{63.3}$$

gde je S površina poprečnog preseka provodnika, a $\mathrm{d}S$ površina tankog prstena šrafiranog na slici 63.1. Konačno, podužna unutrašnja induktivnost provodnika (pri stalnoj struji) iznosi

$$L'_{\mathrm{i}} = 2\frac{W'_{\mathrm{m}}}{I^2} = \frac{\mu}{8\pi} . \tag{63.4}$$

Uočimo da ova induktivnost ne zavisi od debljine provodnika.

64. Izvesti izraz za podužnu spoljašnju induktivnost tankog vazdušnog simetričnog dvožičnog voda. (*P950404*)



Slika 64.1.

REŠENJE:
Neka je poluprečnik svakog provodnika voda a, a odstojanje između osa provodnika d ($d \gg a$). Pretpostavimo da u provodnicima postoje stalne struje iste jačine I ($I > 0$) i suprotnog smera, kao na slici 64.1, koja predstavlja poprečni presek voda. U tački M u ravni osa provodnika vektori magnetske indukcije levog i desnog provodnika, $\boldsymbol{B}_1$ i $\boldsymbol{B}_2$, su kolinearni, te je intenzitet rezultantne indukcije

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right) . \tag{64.1}$$

gde je x koordinata koja definiše položaj tačke M.

Podužni magnetski fluks, računat kroz ravnu površ između provodnika,[5] je

$$\Phi' = \frac{\Phi_l}{l} = \int_{x=a}^{d-a} B\,\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\int_a^{d-a}\frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_a^{d-a}\frac{\mathrm{d}(d-x)}{d-x}\right] =$$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\ln x|_a^{d-a} - \ln(d-x)|_a^{d-a}\right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\ln\frac{d-a}{a} - \ln\frac{a}{d-a}\right) =$$

$$\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-a}{a} \approx \frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d}{a} , \tag{64.2}$$

pri čemu je Φ_l spoljašnji fluks na dužini l voda i upotrebljena je relacija $d - a \approx d$. Odavde je izraz za podužnu spoljašnju induktivnost voda

$$L' = \frac{\Phi'}{I} = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a} . \tag{64.3}$$

[5] Pri određivanju samoinduktivnosti, smerovi struje i orta normale za sračunavanje sopstvenog magnetskog fluksa moraju biti vezani pravilom desne zavojnice.

Uočimo da između podužne spoljašnje induktivnosti datoga voda i njegove podužne kapacitivnosti, $C' = \pi\epsilon_0/\ln(d/a)$, postoji sledeća veza:

$$L'C' = \epsilon_0\mu_0 . \tag{64.4}$$

Kolika je ukupna podužna induktivnost voda sa slike 64.1?

65. Tanak torus od feromagnetskog materijala, permeabilnosti μ, ima uzan vazdušni procep, dužine l_0. Srednji obim feromagnetskog materijala je l ($l \gg l_0$), a površina poprečnog preseka torusa je svuda S. Na torusu se nalazi namotaj sa N zavojaka. Kolika je induktivnost namotaja? Zanemariti rasipanje. (*P960925*)

REŠENJE:
Ako je jačina struje namotaja I, magnetska indukcija u torusu, uz pravilo desne zavojnice, data je izrazom (45.4), pri čemu je $\mu_a = \mu$. Fluks kroz namotaj je

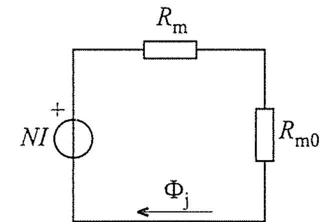
$$\Phi = NBS , \tag{65.1}$$

pa tražena induktivnost iznosi

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{N^2 S}{l/\mu + l_0/\mu_0} . \tag{65.2}$$

Zadatak ćemo rešiti i na drugi način, na osnovu električnog kola prikazanog na slici 65.1, koje je analogno zadatom magnetskom kolu. Magnetski fluks kroz jezgro, Φ_{j}, kome je analogna jačina struje električnog kola, je

$$\Phi_{\mathrm{j}} = \frac{NI}{R_{\mathrm{m}} + R_{\mathrm{m0}}} \tag{65.3}$$



Slika 65.1.

(Omov zakon za prosto kolo), gde je NI magnetomotorna sila (po analogiji sa elektromotornom silom), a R_{m} i R_{m0} su reluktanse (magnetske otpornosti) feromagnetskog dela kola i vazdušnog procepa, respektivno, date sa

$$R_{\mathrm{m}} = \frac{l}{\mu S} , \qquad R_{\mathrm{m0}} = \frac{l_0}{\mu_0 S} . \tag{65.4}$$

Sada je fluks kroz namotaj

$$\Phi = N\Phi_{\mathrm{j}} , \tag{65.5}$$

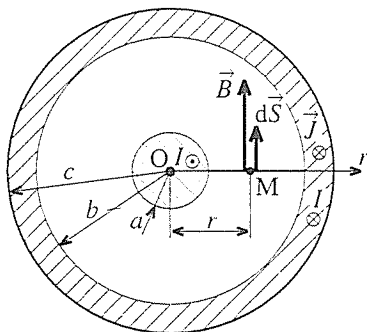
odakle se za induktivnost namotaja dobija izraz (65.2).

66. Provodnici koaksijalnog kabla su od bakra specifične provodnosti $\sigma = 56$ MS/m, a dielektrik je vazduh. Poluprečnik unutrašnjeg provodnika je $a = 3$ mm, a unutrašnji poluprečnik i spoljašnji poluprečnik spoljašnjeg provodnika su $b = 8$ mm i $c = 9$ mm, respektivno. U kablu postoji stalna struja jačine $I = 50$ A. Izračunati (a) podužnu magnetsku energiju kabla i (b) podužnu snagu Džulovih gubitaka u kablu. (*Z960618*)

REŠENJE:
Magnetska indukcija na odstojanju r od ose kabla, $B(r)$, data je izrazima (28.1), pa je podužna magnetska energija kabla

$$W'_{\mathrm{m}} = \int_{r=0}^{c} \underbrace{\frac{B^2(r)}{2\mu_0}}_{w_{\mathrm{m}}} \underbrace{2\pi r\,\mathrm{d}r}_{\mathrm{d}S} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{1}{4} + \ln\frac{b}{a} + \frac{1}{(c^2-b^2)^2}\left[c^4\ln\frac{c}{b} - c^2(c^2-b^2) + \frac{c^4-b^4}{4}\right]\right\} I^2 = 318\,\frac{\mu\mathrm{J}}{\mathrm{m}}, \qquad (66.1)$$

gde je w_{m} gustina magnetske energije, a $\mathrm{d}S$ površina prstena poluprečnika r i širine $\mathrm{d}r$.



Slika 66.1.

Kako se spoljašnja podužna induktivnost koaksijalnog kabla može dobiti i preko fluksa, kao (slika 66.1)

$$L'_{\mathrm{e}} = \frac{\Phi'}{I} = \frac{1}{I}\int_a^b B(r)\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a} = 196,2\,\frac{\mathrm{nH}}{\mathrm{m}}, \qquad (66.2)$$

pri čemu je Φ' podužni sopstveni fluks kabla, računat kroz ravnu površ između provodnika kabla postavljenu radijalno u odnosu na osu kabla, to deo podužne magnetske energije kabla sadržan u dielektriku kabla možemo izračunati i bez integraljenja gustine energije, po obrascu

$$W'_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}L'_{\mathrm{e}}I^2 = 245\,\frac{\mu\mathrm{J}}{\mathrm{m}}. \qquad (66.3)$$

Koristeći se formulom za podužnu otpornost (pri stalnoj struji) homogenog otpornika konstantnog poprečnog preseka, podužna otpornost kabla je

$$R' = R'_1 + R'_2 = \frac{1}{\sigma S_1} + \frac{1}{\sigma S_2} = \frac{1}{\pi\sigma}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2-b^2}\right) = 966\,\frac{\mu\Omega}{\mathrm{m}}, \qquad (66.4)$$

gde su R'_1 i R'_2 podužne otpornosti unutrašnjeg i spoljašnjeg provodnika kabla, respektivno, a S_1 i S_2 površine poprečnih preseka tih provodnika. Odavde je podužna snaga Džulovih gubitaka u kablu

$$P'_{\mathrm{J}} = R'I^2 = 2,4\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}}. \qquad (66.5)$$

67. Jačina struje idealnog kalema, induktivnosti L, data je izrazom $i(t) = I_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, gde su I_0 i τ konstante ($\tau > 0$). (a) Kolika je elektromotorna sila indukovana u kalemu? (b) U odnosu na koji referentni smer se računa ta elektromotorna sila? (c) Koliki je napon kalema? (*P910413*)

REŠENJE:
(a) Elektromotorna sila indukovana u kalemu je

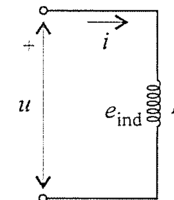
$$e_{\mathrm{ind}}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{LI_0}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}, \qquad (67.1)$$

gde je $\Phi(t)$ magnetski fluks kalema, sračunat u odnosu na ort normale čiji je smer vezan pravilom desne zavojnice sa referentnim smerom struje označenim na slici 67.1.

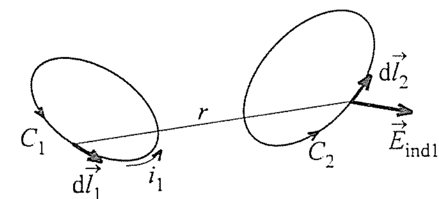
(b) Elektromotorna sila se uvek računa u odnosu na referentni smer struje.

(c) Izraz za napon kalema, za referentni smer sa slike 67.1, glasi:

$$u(t) = -e_{\mathrm{ind}}(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{LI_0}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}. \qquad (67.2)$$



Slika 67.1.



Slika 68.1.

68. Dokazati da su međusobne induktivnosti dve žičane konture u vazduhu jednake. (*P960130*)

REŠENJE:
Pretpostavimo da u konturi C_1 sa slike 68.1 postoji vremenski promenljiva struja, jačine $i_1(t)$. Ova struja praćena je u svojoj okolini indukovanim električnim poljem

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}1} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{r}. \qquad (68.1)$$

Elektromotorna sila indukovana u konturi C_2, usled struje u konturi C_1, je (slika 68.1)

$$e_{\mathrm{ind}12} = \oint_{C_2}\boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}1}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 = -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{r}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = -L_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}.$$

odakle za međusobnu induktivnost kontura C_1 i C_2 dobijamo izraz

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{dl_1 \cdot dl_2}{r} . \qquad (68.3)$$

S obzirom da je

$$dl_1 \cdot dl_2 = dl_2 \cdot dl_1 , \qquad (68.4)$$

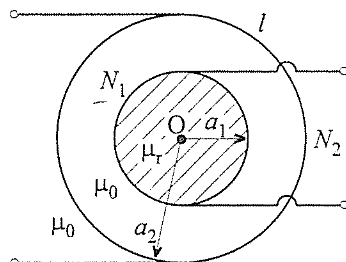
te da znakovi integracije po konturama C_1 i C_2 u izrazu (68.3) mogu da zamene mesta, važi reciprocitet

$$L_{12} = L_{21} , \qquad (68.5)$$

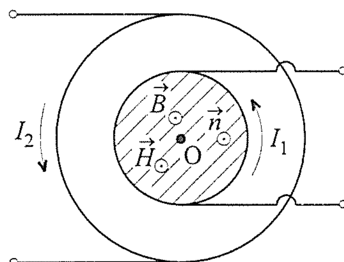
čime je dokaz završen.

Izraz (68.3) predstavlja Nojmanov obrazac za računanje induktivnosti žičanih kontura.

69. Na slici 69.1 je prikazan poprečni presek dva vrlo dugačka solenoida postavljena koaksijalno. Poprečni preseci solenoida su kružni, poluprečnika a_1, odnosno a_2, dužina solenoida je l, a brojevi zavojaka su N_1 i N_2. Unutrašnjost prvog solenoida je ispunjena linearnim feromagnetskim materijalom, relativne permeabilnosti μ_r, a između namotaja prvog i drugog solenoida i izvan drugog solenoida je vazduh. Odrediti izraz za koeficijent sprege ovih namotaja. (*Z970428*)



Slika 69.1.



Slika 69.2.

REŠENJE:
Usvojimo referentne smerove za struje namotaja kao na slici 69.2. Pretpostavimo prvo da struja postoji samo u prvom (unutrašnjem) solenoidu. Tada magnetsko polje postoji samo u feromagnetskom jezgru. To polje je homogeno, jačine

$$H_1 = \frac{N_1 I_1}{l} , \qquad (69.1)$$

gde je I_1 jačina struje u prvom solenoidu, pa su sopstvena induktivnost prvog solenoida i međusobna induktivnost prvog i drugog solenoida, redom,

$$L_1 = \frac{\Phi_1}{I_1} = \frac{N_1\mu_r\mu_0 H_1 a_1^2\pi}{I_1} = \frac{\mu_r\mu_0 N_1^2 a_1^2\pi}{l} , \qquad (69.2)$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} = \frac{N_2\mu_r\mu_0 H_1 a_1^2\pi}{I_1} = \frac{\mu_r\mu_0 N_1 N_2 a_1^2\pi}{l} . \qquad (69.3)$$

Ako se pretpostavi da u spoljašnjem solenoidu postoji struja jačine I_2, a da je $I_1 = 0$, magnetsko polje postoji u celoj unutrašnjosti tog solenoida. I ovo polje je homogeno, intenziteta

$$H_2 = \frac{N_2 I_2}{l} , \qquad (69.4)$$

što dobijamo primenom uopštenog Amperovog zakona. Magnetska indukcija u jezgru je $B_2 = \mu_r\mu_0 H_2$, a u vazduhu $B_{20} = \mu_0 H_2$, pa je sopstvena induktivnost drugog solenoida

$$L_2 = \frac{\Phi_2}{I_2} = \frac{N_2[B_2 a_1^2\pi + B_{20}(a_2^2 - a_1^2)\pi]}{I_2} = \frac{\mu_0 N_2^2\pi[(\mu_r - 1)a_1^2 + a_2^2]}{l} . \qquad (69.5)$$

Traženi izraz za koeficijent sprege namotaja je

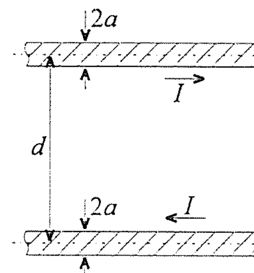
$$k = \frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_1 L_2}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\mu_r - 1 + (a_2/a_1)^2}} . \qquad (69.6)$$

70. Na jednom kraju veoma dugačkog vazdušnog dvožičnog voda, poluprečnika provodnika a i rastojanja između osa provodnika d ($d \gg a$), priključen je generator stalnog napona, a drugi kraj voda je kratko spojen tankim žičanim provodnikom, kao što je prikazano na slici 70.1. Odrediti izraz za vektor magnetske sile na kratkospojnik, kada je intenzitet struje u njemu I. (*Z960601*)

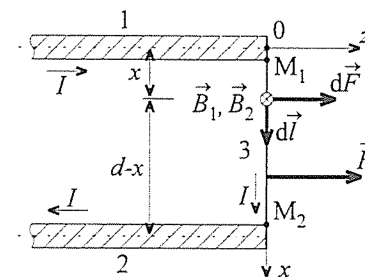
REŠENJE:
Označimo provodnike dvožičnog voda sa 1 i 2, a poprečni provodnik (kratkospojnik) sa 3 (slika 70.2). Magnetska sila na provodnik 3 je

$$\boldsymbol{F} = \int_{M_1}^{M_2} I\,d\boldsymbol{l} \times (\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2) , \qquad (70.1)$$

gde su $\boldsymbol{B}_1$ i $\boldsymbol{B}_2$ indukcije provodnika 1 i 2, respektivno, a tačke M_1 i M_2 predstav-



Slika 70.1.



Slika 70.2.

ljaju krajeve provodnika 3. Koristeći se obrascem (4.1), ove indukcije u proizvoljnoj tački M kratkospojnika, na odstojanju x od ose provodnika 1 ($a \leq x \leq d-a$), iznose

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}, \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi(d-x)}, \tag{70.2}$$

prema referentnom smeru označenom na slici 70.2. Očigledno, vektor $\boldsymbol{F}$ je normalan na provodnik 3, a za referentni smer udesno njegov intenzitet je

$$F = \int_{x=a}^{d-a} I\,\mathrm{d}x(B_1 + B_2) \approx \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d}{a} \tag{70.3}$$

[integraciju videti u (64.2)].

Zadatak ćemo rešiti i na drugi način, primenom principa virtualnih radova (pomeraja). Zamislimo da je magnetska sila (koju tražimo) pomerila kratkospojnik za dužinu dz u pravcu z-ose ucrtane na slici 70.2, a da se pri tome jačina struje I nije promenila. Kako se dati dvožični vod time produžio za dz, a jačina struje voda ostala ista, to se magnetska energija voda povećala za

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}L'\,\mathrm{d}z\,I^2 . \tag{70.4}$$

gde je L' podužna induktivnost voda, približno data izrazom (64.3). Stoga je tražena sila

$$F_z = \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{2}L'I^2 \qquad (I = \mathrm{const}), \tag{70.5}$$

odnosno

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\ln\frac{d}{a}\,\boldsymbol{k} . \tag{70.6}$$

71. Podužna gustina zavojaka vrlo dugačkog solenoida je $N' = 2000$ zavojaka/m, poprečni presek je kružan, poluprečnika $a = 100$ mm, a u solenoidu je vazduh. Solenoid je priključen na idealan strujni generator prostoperiodične struje $i_1(t) = I_{\mathrm{m}}\cos\omega t$, gde je $I_{\mathrm{m}} = 2$ mA i $\omega = 10^7\ \mathrm{s}^{-1}$. U ravni poprečnog preseka solenoida postavljena je kružna žičana kontura, poluprečnika $b = 50$ mm, kao što je prikazano na slici 71.1. Otpornost konture je $R = 2\ \Omega$. Struja indukovana u konturi, $i_2(t)$, fazno zaostaje za strujom $i_1(t)$ za $5\pi/6$. (a) Kolika je induktivnost žičane konture? (b) Kolika je srednja snaga Džulovih gubitaka u konturi? (*Z900402*)

REŠENJE:

(a) Kompleksna jačina struje solenoida je $\underline{I}_1 = \sqrt{2}$ mA. Na osnovu Faradejevog zakona elektromagnetske indukcije, kompleksna indukovana elektromotorna sila (međusobne indukcije) u žičanoj konturi je

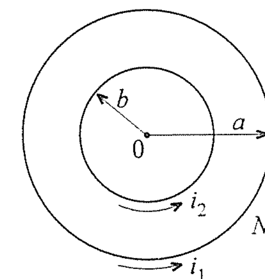
$$\underline{E}_{\mathrm{ind12}} = -\mathrm{j}\omega\mu_0 N' b^2 \pi \underline{I}_1 , \tag{71.1}$$

prema referentnom smeru koji se slaže sa smerom struje i_2 označenim na slici 71.1. Kompleksni izraz za jačinu struje konture glasi:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}_{\mathrm{ind12}}}{R + \mathrm{j}\omega L} . \tag{71.2}$$

gde je L induktivnost konture. Kako iz kompleksne relacije (71.1) zaključujemo da elektromotorna sila $e_{\mathrm{ind12}}(t)$ fazno zaostaje za strujom $i_1(t)$ za $\pi/2$, a struja $i_2(t)$ fazno zaostaje za strujom $i_1(t)$ za $5\pi/6$ (prema uslovu zadatka), to struja $i_2(t)$ fazno zaostaje za elektromotornom silom $e_{\mathrm{ind12}}(t)$ za

$$\varphi = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} . \tag{71.3}$$



Slika 71.1.

Pošto prema relaciji (71.2) imamo i

$$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{\omega L}{R} . \tag{71.4}$$

sledi da je $\omega L/R = \sqrt{3}$, odnosno $L = 346,4$ nH.

(b) Iz relacija (71.1) i (71.2), za efektivnu vrednost jačine struje $i_2(t)$ dobijamo $I_2 = 69,8$ mA, pa je tražena srednja snaga Džulovih gubitaka u konturi

$$P_{\mathrm{J}} = RI_2^2 = 9,7\ \mathrm{mW} . \tag{71.5}$$

72. Pravougaoni zavojak, dimenzija $a = 100$ mm i $b = 200$ mm, nepokretan je u homogenom obrtnom magnetskom polju, indukcije $B_0 = 10$ mT i ugaone brzine $w = 10^4$ rad/s. Induktivnost zavojka je $L = 0,1\ \mu$H, a otpornost $R = 1$ mΩ. U trenutku $t = 0$, vektor magnetske indukcije obrtnog polja normalan je na ravan zavojka. Odrediti (a) trenutni intenzitet struje u zavojku, (b) trenutni intenzitet sprega magnetskih sila koje deluju na zavojak i (c) srednju vrednost ovoga sprega u toku jednog perioda. (*Z930619*)

REŠENJE:

(a) Označimo sa θ ugao između vektora magnetske indukcije, $\boldsymbol{B}$, i orta normale, $\boldsymbol{n}$, na površ zavojka (slika 72.1). Na osnovu uslova zadatka imamo

$$\theta(t) = wt , \tag{72.1}$$

pa je magnetski fluks kroz zavojak

$$\Phi(t) = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S} = B_0 ab\cos wt , \tag{72.2}$$

gde je $\boldsymbol{S}$ vektor površine zavojka. S obzirom na to da je fluks prostoperiodičan, kružne učestanosti $\omega = w$, može se predstaviti u kompleksnom domenu kao

$$\underline{\Phi} = Bab\,, \qquad B = \frac{B_0}{\sqrt{2}}\,. \tag{72.3}$$

pa je kompleksna indukovana elektromotorna sila u zavojku, usled obrtnog magnetskog polja,

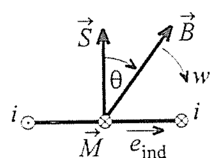
$$\underline{E}_{\rm ind} = -{\rm j}\omega\underline{\Phi} = -{\rm j}\omega Bab = -{\rm j}\sqrt{2}\ {\rm V}\,. \tag{72.4}$$

Referentni smer ove elektromotorne sile je označen na slici 72.1. Kompleksna jačina struje (u odnosu na isti referentni smer) je

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_{\rm ind}}{R+{\rm j}\omega L} = 1000\,{\rm e}^{-{\rm j}3\pi/4}\ {\rm A}\,. \tag{72.5}$$

pa je trenutna jačina struje zavojka

$$i(t) = \sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right)\ {\rm kA}\,. \tag{72.6}$$



Slika 72.1.

(b) Na osnovu relacija (17.5) i (17.6), intenzitet momenta sprega magnetskih sila koje deluju na zavojak je

$$M(t) = i(t)abB_0\sin[\theta(t)] =$$
$$0,2\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right)\sin\omega t\ {\rm Nm}\,. \tag{72.7}$$

Vektor $\boldsymbol{M}$ je duž ose oko koje se obrće vektor $\boldsymbol{B}$ (slika 72.1).

(c) Predstavljanjem proizvoda trigonometrijskih funkcija preko zbira, dobijamo da je srednja vrednost momenta $M_{\rm sr} = 0,1$ Nm.

O kakvoj vrsti elektromagnetske indukcije se radi u ovome problemu (statičkoj, dinamičkoj ili mešovitoj)?

73. Merač magnetske indukcije sastoji se od kratkog kalema-sonde, male površine poprečnog preseka S, vezanog u kolo sa balističkim galvanometrom. Kalem ima N zavojaka, a ukupna otpornost kalema i galvanometra je R. Sonda se nalazi u homogenom, stalnom magnetskom polju indukcije B, tako da je vektor $\boldsymbol{B}$ normalan na ravan zavojaka. Zatim se sonda iznese iz polja. Kolika količina elektriciteta pri tome protekne kroz galvanometar? Skicirati sondu, galvanometar i vektor $\boldsymbol{B}$. Naznačiti smer protoka. (*P940407*)

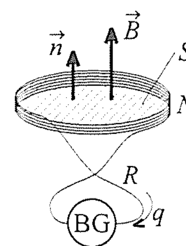
REŠENJE:
Prema slici 73.1, magnetski fluks kroz namotaj sonde u početnom položaju je

$$\Phi_1 = NBS\,. \tag{73.1}$$

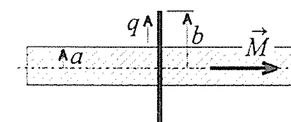
Kada se sonda iznese iz polja, fluks je $\Phi_2 = 0$, pa je protok kroz balistički galvanometar (BG) u odnosu na referentni smer sa slike (određen, po pravilu desne zavojnice, prema smeru normale $\boldsymbol{n}$ za računanje fluksa Φ)

$$q = -\frac{\Delta\Phi}{R} = -\frac{\Phi_2-\Phi_1}{R} = \frac{NBS}{R}\,, \tag{73.2}$$

gde je $\Delta\Phi$ priraštaj fluksa.



Slika 73.1.



Slika 74.1.

74. Homogeno namagnetisan stalan magnet ima oblik vrlo dugačkog okruglog cilindra, poluprečnika poprečnog preseka a. Magnetizacija cilindra je M. Vektor $\boldsymbol{M}$ je paralelan osi štapa. Oko magneta je simetrično postavljen kratko spojeni žičani zavojak, poluprečnika b ($b > a$) i otpornosti R, kao što je prikazano na slici 74.1. Kolika količina elektriciteta q, prema referentnom smeru prikazanom na slici, protekne kroz zavojak prilikom udaljavanja magneta? (*P940616*)

REZULTAT:
Traženi protok je $q = -\pi\mu_0 a^2 M/R$.

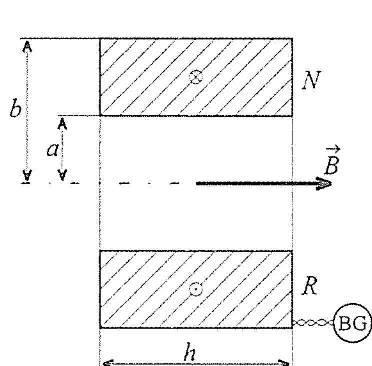
75. Na slici slici 75.1 je prikazan torusni namotaj formiran od velikog broja, N, zavojaka tanke žice, ravnomerno raspodeljenih po poprečnom preseku torusa. Između krajeva namotaja vezan je balistički galvanometar. Ukupna otpornost namotaja i galvanometra je R. Odrediti izraz za protok kroz balistički galvanometar kada se torusni namotaj unese u homogeno, stalno magnetsko polje indukcije $\boldsymbol{B}$, kao na slici 75.1. (*Z950908*)

REŠENJE:
U stacionarnom stanju kada se kalem nalazi u magnetskom polju fluks kroz jedan zavojak torusnog namotaja je (slika 75.2)

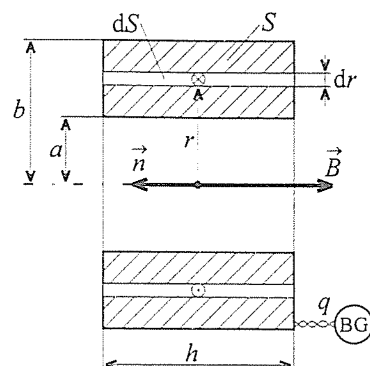
$$\Phi^{(1)} = -Br^2\pi\,, \tag{75.1}$$

pri čemu je r poluprečnik zavojka. Broj zavojaka u delu namotaja čiji je poprečni presek traka širine h i debljine ${\rm d}r$, šrafirana na slici 75.2, iznosi

$${\rm d}N = \frac{N}{S}\,{\rm d}S = \frac{N}{h(b-a)}h\,{\rm d}r = \frac{N\,{\rm d}r}{b-a}\,. \tag{75.2}$$



Slika 75.1.



Slika 75.2.

gde je S površina poprečnog preseka torusa, a $\mathrm{d}S$ površina trake. Stoga je ukupan fluks

$$\Phi = \int_{r=a}^{r=b} \mathrm{d}N\Phi^{(1)} = -\frac{\pi N B}{b-a}\int_a^b r^2\,\mathrm{d}r = -\frac{\pi N B(b^2+ab+a^2)}{3}\,. \tag{75.3}$$

Kako je fluks u prvom stacionarnom stanju jednak nuli, to je količina elektriciteta protekla kroz balistički galvanometar

$$q = -\frac{\Delta\Phi}{R} = -\frac{\Phi}{R} = \frac{\pi N B(b^2+ab+a^2)}{3R}\,. \tag{75.4}$$

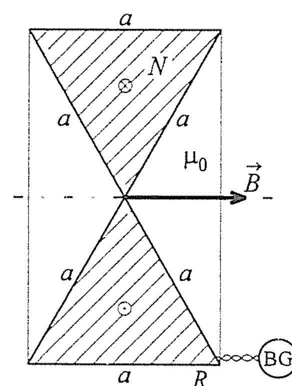
76. Torusni namotaj ima poprečni presek oblika jednakostraničnog trougla, dužine stranice a (slika 76.1). Namotaj je formiran od N zavojaka ravnomerno raspodeljenih po poprečnom preseku torusa. Između krajeva namotaja vezan je balistički galvanometar. Ukupna otpornost kola koje čine namotaj i galvanometar iznosi R. Orijentacija ovoga kola, koja se poklapa sa smerom motanja namotaja, označena je na slici 76.1. Namotaj se nalazi u homogenom, stalnom magnetskom polju indukcije $\boldsymbol{B}$, kao na slici 76.1. Odrediti izraz za protok kroz galvanometar po ukidanju magnetskog polja indukcije $\boldsymbol{B}$. (*Z950127*)

REŠENJE:
Zadatak se rešava slično kao prethodni zadatak. Ovde je u jednačini (75.2)

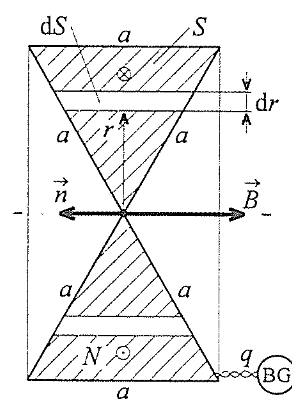
$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \tag{76.1}$$

(površina jednakostraničnog trougla) i

$$\mathrm{d}S = \frac{2r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{3}} \tag{76.2}$$



Slika 76.1.



Slika 76.2.

(površina trake šrafirane na slici 76.2). Stoga za fluks kroz namotaj u početnom stanju [videti izraz (75.3)] imamo

$$\Phi = -\frac{8\pi N B}{3a^2}\int_0^{a\sqrt{3}/2} r^3\,\mathrm{d}r = -\frac{3\pi N a^2 B}{8}\,, \tag{76.3}$$

pa traženi izraz za protok glasi

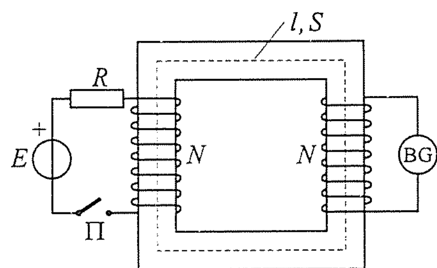
$$q = \frac{\Phi}{R} = -\frac{3\pi N a^2 B}{8R}\,, \tag{76.4}$$

jer je fluks u krajnjem stanju jednak nuli.

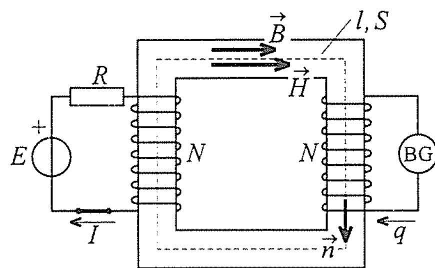
77. Feromagnetsko jezgro, prikazano na slici 77.1, ima površinu poprečnog preseka $S = 2\ \mathrm{cm}^2$ i srednji obim $l = 20$ cm. Na jezgru se nalaze dva namotaja, zanemarljivo malih otpornosti, sa po $N = 80$ zavojaka. Elektromotorna sila generatora, koji se može priključiti prekidačem Π u kolo prvoga namotaja, je $E = 10$ V, a unutrašnja otpornost $R = 50\ \Omega$. U kolo drugoga namotaja je priključen balistički galvanometar, otpornosti $R_{\mathrm{BG}} = 10\ \Omega$. Prekidač Π je najpre otvoren, a zatim se zatvori. Od trenutka zatvaranja prekidača do uspostavljanja stacionarnog stanja kroz galvanometar protekne količina elektriciteta $q = 800\ \mu$C. Smatrajući da je materijal od koga je načinjeno jezgro linearan, izračunati relativnu permeabilnost jezgra. (*Z910129*)

REŠENJE:
Kada je prekidač Π otvoren, nema struje ni u jednom namotaju, pa je magnetsko polje u jezgru jednako nuli. Kada se prekidač zatvori, u primarnom namotaju se uspostavi struja jačine

$$I = \frac{E}{R} = 0,2\ \mathrm{A}\,, \tag{77.1}$$



Slika 77.1.



Slika 77.2.

a u jezgru magnetsko polje jačine

$$H = \frac{NI}{l} = 80\ \frac{\text{A}}{\text{m}} \tag{77.2}$$

(slika 77.2). Prilikom uspostavljanja polja, kroz sekundarno kolo protekne količina elektriciteta

$$q = -\frac{\Delta\Phi}{R_{\text{BG}}} = -\frac{\Phi}{R_{\text{BG}}}\,, \tag{77.3}$$

gde je Φ fluks kroz drugi namotaj koji odgovara konačnoj struji primara. U odnosu na referentne smerove sa slike 77.2, fluks Φ je pozitivan, pa mora biti $q = -800\ \mu\text{C}$. Sada je iz relacije (77.3) $\Phi = 8$ mWb. Kako je

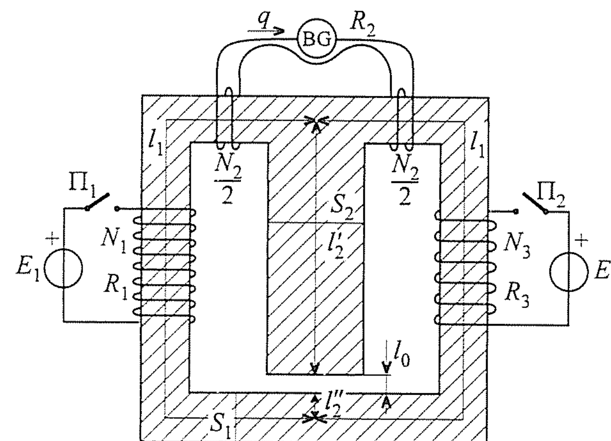
$$\Phi = NBS\,, \tag{77.4}$$

to je magnetska indukcija jezgra $B = 0,5$ T. Konačno, relativna permeabilnost jezgra iznosi

$$\mu_\text{r} = \frac{B}{\mu_0 H} \approx 5000\,. \tag{77.5}$$

78. Dimenzije magnetskog kola sa slike 78.1 su: $l_1 = 20$ cm, $l_2 = l_2' + l_2'' = 10$ cm, $l_0 = 1$ mm, $S_1 = 1\ \text{cm}^2$ i $S_2 = 2\ \text{cm}^2$. Brojevi zavojaka i otpornosti pojedinih namotaja iznose: $N_1 = 1000$, $R_1 = 100\ \Omega$, $N_2 = 100$, $R_2 = 10\ \Omega$ i $N_3 = 650$, $R_3 = 20\ \Omega$. U kolu trećega namotaja postoji idealan naponski generator, stalne elektromotorne sile $E_3 = 20$ V. Karakteristika magnetisanja materijala od koga je načinjeno jezgro može se aproksimirati funkcijom $B = [1,5H/(500 + H)]$ T (H u A/m), $H \geq 0$. Prekidači Π_1 i Π_2 su otvoreni. Nakon istovremenog zatvaranja ovih prekidača ustanovi se protok $q = 700\ \mu\text{C}$ kroz balistički galvanometar u kolu drugoga namotaja, u odnosu na referentni smer prikazan na slici 78.1. Kolika je elektromotorna sila E_1 u kolu prvoga namotaja? (*Z960601*)

REŠENJE:
Usvojimo referentne smerove za normale na poprečne preseke grana jezgra, $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ i $\boldsymbol{n}_3$, kao na slici 78.2, koja prikazuje dato magnetsko kolo u drugom stacionarnom



Slika 78.1.

stanju. Označimo odgovarajuće magnetske flukseve grana sa Φ_1, Φ_2 i Φ_3, respektivno. Neka su na isti način kao normale usmereni i vektori magnetske indukcije i jačine magnetskog polja u granama. Kako su pre zatvaranja prekidača Π_1 i Π_2 svi fluksevi bili jednaki nuli, to je protok kroz kolo galvanometra

$$q = -\frac{\Delta\Phi}{R_2} = \frac{1}{R_2}\left(\frac{N_2}{2}\Phi_1 + \frac{N_2}{2}\Phi_3\right) = \frac{N_2(\Phi_1 + \Phi_3)}{2R_2}\,. \tag{78.1}$$

Prvi Kirhofov zakon za magnetska kola daje

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_3\,, \tag{78.2}$$

pa imamo

$$q = \frac{N_2\Phi_2}{2R_2}\,. \tag{78.3}$$

Odavde je $\Phi_2 = 140\ \mu\text{Wb}$, pa indukcije u drugoj grani (B_2) i vazdušnom procepu (B_0) iznose

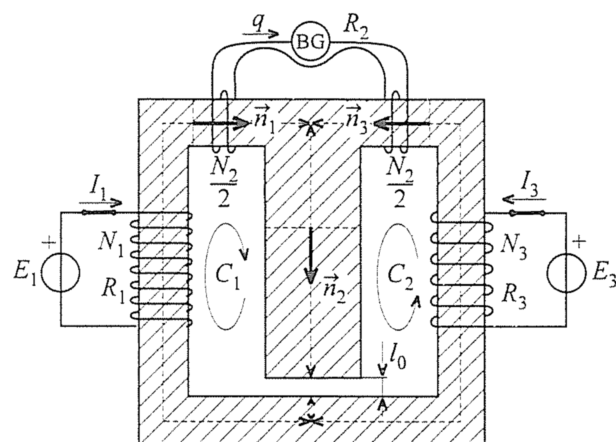
$$B_2 = B_0 = \frac{\Phi_2}{S_2} = 0,7\ \text{T}\,. \tag{78.4}$$

Iz analitički zadate karakteristike magnetisanja materijala jezgra dobijamo odgovarajuću jačinu magnetskog polja u drugoj grani,

$$H_2 = \frac{500B_2}{1,5 - B_2} = 437,5\ \frac{\text{A}}{\text{m}}\,, \tag{78.5}$$

dok je u vazdušnom procepu

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = 557\ \frac{\text{kA}}{\text{m}}\,. \tag{78.6}$$



Slika 78.2.

Iz drugog Kirhofovog zakona za magnetska kola primenjenog na zatvoreni put C_2 prikazan na slici 78.2 sledi

$$H_3 = \frac{N_3 I_3 - H_2 l_2 - H_0 l_0}{l_1} = 246,2\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\,, \qquad (78.7)$$

pa je po karakteristici magnetisanja

$$B_3 = \frac{1,5 H_3}{500 + H_3} = 0,495\ \mathrm{T}\,. \qquad (78.8)$$

Indukciju prve grane sada dobijamo iz relacije (78.2),

$$B_1 = \frac{B_2 S_2 - B_3 S_1}{S_1} = 0,905\ \mathrm{T}\,, \qquad (78.9)$$

odakle je

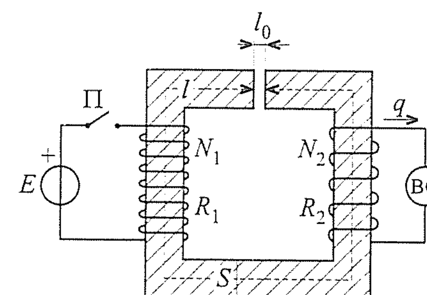
$$H_1 = \frac{500 B_1}{1,5 - B_1} = 760,5\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\,. \qquad (78.10)$$

Konačno, drugi Kirhofov zakon za magnetska kola primenjen na zatvoreni put C_1 daje

$$I_1 = \frac{H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_0 l_0}{N_1} = 0,753\ \mathrm{A}\,, \qquad (78.11)$$

pa tražena elektromotorna sila iznosi

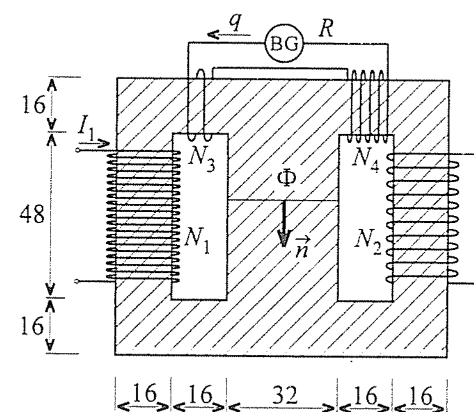
$$E_1 = R_1 I_1 = 75,3\ \mathrm{V}\,. \qquad (78.12)$$



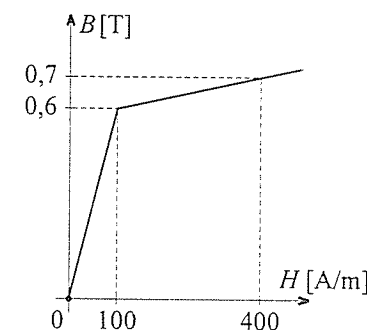
Slika 79.1.

79. Za magnetsko kolo prikazano na slici 79.1 je $l = 50$ cm, $l_0 = 0,2$ mm i $S = 5\ \mathrm{cm}^2$. Karakteristika magnetisanja materijala od koga je načinjeno jezgro može se aproksimirati izrazom $B = B_\mathrm{m} \operatorname{arctg}(H/H')$, gde je $B_\mathrm{m} = 1,5$ T i $H' = 1000$ A/m. Prvi namotaj ima $N_1 = 1000$ zavojaka i otpornost $R_1 = 10\ \Omega$. Drugi namotaj ima $N_2 = 500$ zavojaka, a ukupna otpornost namotaja i balističkog galvanometra koji je na njega priključen je $R_2 = 100\ \Omega$. U trenutku $t = 0$ prekidač Π se zatvori. Od tog trenutka, pa do uspostavljanja stacionarnog stanja, kroz balistički galvanometar protekne količina elektriciteta $q = 5$ mC, u odnosu na referentni smer prikazan na slici 79.1. Izračunati elektromotornu silu generatora, E. (*Z900512*)

REZULTAT:
Tražena elektromotorna sila iznosi $E = 23,8$ V.



Slika 80.1.



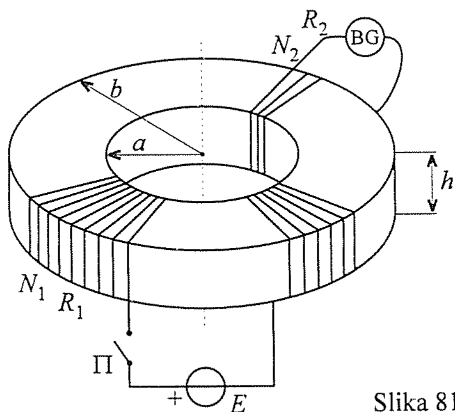
Slika 80.2.

80. Na nenamagnetisanom feromagnetskom jezgru magnetskog kola prikazanog na slici 80.1 nalaze se namotaji čiji su brojevi zavojaka $N_1 = 200$, $N_2 = 100$,

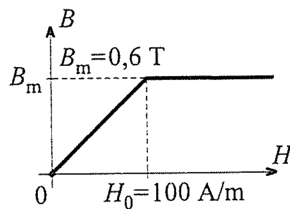
$N_3 = 10$ i $N_4 = 30$. Dimenzije magnetskog kola su na slici 80.1 date u milimetrima. Debljina magnetskog kola (dimenzija u pravcu normalnom na ravan crteža) je $a = 20$ mm. Idealizovana karakteristika prvobitnog magnetisanja feromagnetskog jezgra je prikazana na slici 80.2. U prvom i drugom namotaju se istovremeno uspostavljaju struje. Poznata je jačina struje prvog namotaja, $I_1 = 0,1$ A, i magnetski fluks u srednjem delu magnetskog kola, $\Phi = 256$ μWb prema normali označenoj na slici 80.1. Ukupna otpornost kola sa balističkim galvanometrom iznosi $R = 5$ Ω. Izračunati količinu elektriciteta proteklu kroz galvanometar tokom uspostavljanja struja u namotajima. (*Z940405*)

REZULTAT:
Prema referentnom smeru označenom na slici 80.1, protok kroz kolo galvanometra je $q = -764$ μC.

81. Na feromagnetskom jezgru oblika torusa, prikazanom na slici 81.1, za koje je $a = 2$ cm, $b = 4$ cm i $h = 1$ cm, nalazi se namotaj sa $N_1 = 157$ zavojaka žice, namotanih ravnomerno i gusto po celom torusu. Karakteristika prvobitnog magnetisanja materijala od koga je načinjeno jezgro se može, idealizovano, predstaviti kao na slici 81.2. Namotaj sa balističkim galvanometrom obuhvata torusno jezgro kao na slici 81.1, pri čemu broj zavojaka iznosi $N_2 = 12$. Ukupna otpornost sekundarnog kola iznosi $R_2 = 2$ Ω, dok je otpornost primarnog namotaja $R_1 = 10$ Ω. Jezgro je nenamagnetisano, a prekidač Π otvoren. Zatvaranjem ovoga prekidača u primarno kolo se uključuje idealan naponski generator stalne elektromotorne sile $E = 1$ V. Koliki je protok kroz galvanometar nakon zatvaranja prekidača Π? (*Z960204*)

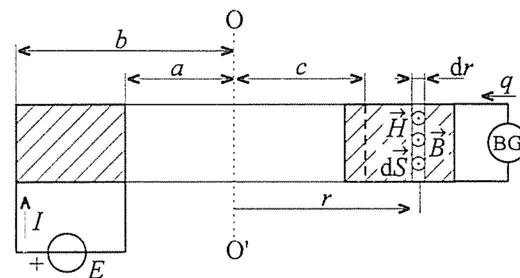


Slika 81.1.

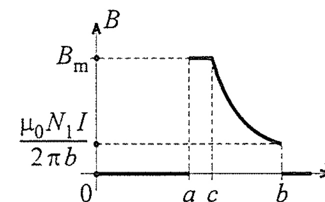


Slika 81.2.

REŠENJE:
Posmatrajmo stacionarno stanje uspostavljeno nakon zatvaranja prekidača Π. Zbog simetrije, linije magnetskog polja su krugovi sa centrima na osi OO' prikazanoj na slici 81.3. Kako se radi o debelom torusu (uočiti da je $b - a = a$), to se intenzitet



Slika 81.3.



Slika 81.4.

vektora jačine magnetskog polja u jezgru, $\boldsymbol{H}$, ne može smatrati konstantnim. Primenom uopštenog Amperovog zakona, za ovaj intenzitet na odstojanju r od ose OO' dobijamo

$$H(r) = \frac{N_1 I}{2\pi r}, \qquad a \le r \le b, \tag{81.1}$$

gde je

$$I = \frac{E}{R_1} = 100 \text{ mA} \tag{81.2}$$

jačina struje primara. Van torusa magnetsko polje ne postoji (što sledi opet iz Amperovog zakona). Minimalna i maksimalna jačina magnetskog polja u jezgru su

$$H_{\min} = H(b) = 62,5\ \frac{\text{A}}{\text{m}}, \qquad H_{\max} = H(a) = 125\ \frac{\text{A}}{\text{m}}. \tag{81.3}$$

Kako je

$$H_{\min} < H_0 < H_{\max}, \tag{81.4}$$

to je deo jezgra u kome je $H(r) > H_0$ u zasićenju $[B(r) = B_\text{m}]$, dok je preostali deo jezgra u linearnom radnom režimu, pri čemu je

$$B(r) = \mu_\text{a} H(r), \qquad \mu_\text{a} = \frac{B_\text{m}}{H_0} = 0,006\ \frac{\text{H}}{\text{m}} \tag{81.5}$$

(μ_a je prvobitna permeabilnost materijala). Iz uslova

$$H(c) = H_0 \tag{81.6}$$

dobijamo radijalno odstojanje c koje predstavlja granicu između dela jezgra u zasićenju i dela jezgra u linearnom režimu,

$$c = \frac{N_1 I}{2\pi H_0} = 2,5 \text{ cm}. \tag{81.7}$$

Na slici 81.4 je prikazana raspodela magnetske indukcije, $B(r)$, duž radijalne ose.

Fluks kroz poprečni presek jezgra, prema orijentaciji površi označenoj na slici 81.3, je

$$\Phi_\text{j} = \int_{r=a}^{r=b} B(r)\,\text{d}S = B_\text{m} h(c-a) + \frac{\mu_\text{a} N_1 I h}{2\pi} \int_c^b \frac{\text{d}r}{r} =$$

$$B_\mathrm{m} h \left[(c-a) + \frac{N_1 I}{2\pi H_0} \ln \frac{b}{c} \right] = 100\ \mu\mathrm{Wb}\,, \tag{81.8}$$

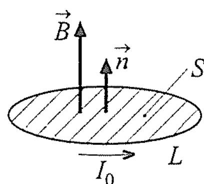
pri čemu je za integraciju po delu poprečnog preseka jezga u kome je indukcija nehomogena usvojeno $\mathrm{d}S = h\,\mathrm{d}r$ (površina trake šrafirane na slici 81.3). Odavde je fluks kroz namotaj u kolu galvanometra

$$\Phi = N_2 \Phi_\mathrm{j} = 1,2\ \mathrm{mWb}\,. \tag{81.9}$$

U toku uspostavljanja struje u primarnom namotaju kroz sekundarni namotaj protekne

$$q = -\frac{\Delta\Phi}{R} = -\frac{\Phi}{R} = -603\ \mu\mathrm{C}\,, \tag{81.10}$$

u odnosu na referentni smer protoka sa slike 81.3.



Slika 82.1.

82. Tanka, ravna superprovodna kontura, površine S i induktivnosti L, nalazi se u homogenom, stalnom magnetskom polju vektora magnetske indukcije $\boldsymbol{B}$. Kontura je prvo postavljena tako da je normala na površ konture paralelna vektoru $\boldsymbol{B}$, kao na slici 82.1. U tome položaju konture u njoj postoji stalna struja jačine I_0. Odrediti izraz za jačinu struje konture kada se ona okrene tako da joj ravan bude paralelna vektoru $\boldsymbol{B}$. (*P930221*)

REŠENJE:
Magnetski fluks kroz konturu u prvome položaju, Φ_0, jednak je zbiru spoljašnjeg i sopstvenog fluksa,

$$\Phi_0 = BS + LI_0\,, \tag{82.1}$$

pri čemu je ort $\boldsymbol{n}$ označen na slici 82.1. Ukupan fluks kroz konturu kada joj je ravan paralelna vektoru $\boldsymbol{B}$ iznosi

$$\Phi = LI\,, \tag{82.2}$$

gde je I jačina struje konture u tome položaju.

Kako je kontura superprovodna (otpornost konture je $R = 0$), ukupan fluks kroz konturu se ne može promeniti, pa je

$$\Phi = \Phi_0\,. \tag{82.3}$$

Odavde je tražena jačina struje kroz konturu u drugome položaju

$$I = I_0 + \frac{BS}{L}\,. \tag{82.4}$$

83. Kružna superprovodna kontura, poluprečnika a i induktivnosti L, najpre se nalazi izvan magnetskog polja, a u konturi ne postoji struja. Zatim se kontura unese u homogeno, stalno magnetsko polje, vektora magnetske indukcije $\boldsymbol{B}$, tako da je ravan konture normalna na linije polja. Kolika je tada jačina struje konture? (*P920627*)

REZULTAT:
Jačina struje konture kada se ona unese u magnetsko polje je $I = -Ba^2\pi/L$, u odnosu na referentni smer koji je po pravilu desne zavojnice vezan sa referentnim smerom vektora $\boldsymbol{B}$.

84. Na tanko torusno jezgro, površine poprečnog preseka S i srednjeg obima l, ravnomerno i gusto je namotano N zavojaka. Otpornost namotaja je zanemarljivo mala. U namotaju postoji periodična struja čija je jačina $i(t)$ skicirana na slici 84.1. Pri uspostavljenoj struji, ciklus histerezisa materijala od koga je načinjeno jezgro prikazan je na slici 84.2, gde je $B_\mathrm{m}/H_\mathrm{m} = \mu_\mathrm{h}$ poznata konstanta. Skicirati napon namotaja u zavisnosti od vremena u intervalu $0 \le t \le T$. (*P930624*)

REŠENJE:
Na slici 84.3 su označeni referentni smerovi veličina koje su od interesa za rešenje ovoga zadatka. Jačina magnetskog polja u jezgru, data izrazom

$$H(t) = \frac{N i(t)}{l}\,, \tag{84.1}$$

skicirana je, u zavisnosti od vremena, na slici 84.4. Na osnovu ovoga grafika i oblika ciklusa histerezisa sa slike 84.2, možemo nacrtati zavisnost magnetske indukcije jezgra (B) od vremena (slika 84.5).

Kako je otpornost namotaja zanemarljivo mala, napon namotaja je

$$u(t) = u_{12}(t) = -e_\mathrm{ind}(t) = \frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = NS\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}\,, \tag{84.2}$$

gde su $\Phi(t)$ i $e_\mathrm{ind}(t)$ magnetski fluks kroz namotaj i elektromotorna sila indukovana u namotaju, respektivno. Grafik funkcije $u(t)$ skiciran je na slici 84.6. Ova funkcija je periodična, sa periodom T.

Maksimalni napon, U_0, srazmeran je nagibu funkcije $B(t)$ u prvoj četvrtini perioda,

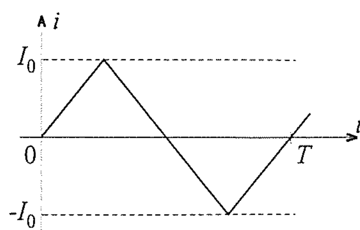
$$U_0 = NS\frac{2B_\mathrm{m}}{T/4}\,. \tag{84.3}$$

Konačno, kako je

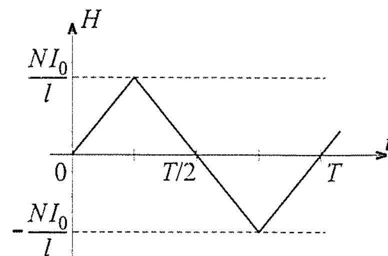
$$B_\mathrm{m} = \mu_\mathrm{h} H_\mathrm{m} = \mu_\mathrm{h}\frac{N I_0}{l}\,, \tag{84.4}$$

to je

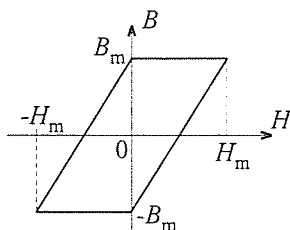
$$U_0 = \frac{8\mu_\mathrm{h} N^2 S I_0}{T\,l}\,. \tag{84.5}$$



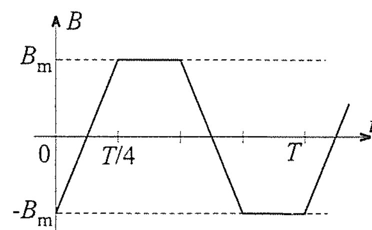
Slika 84.1.



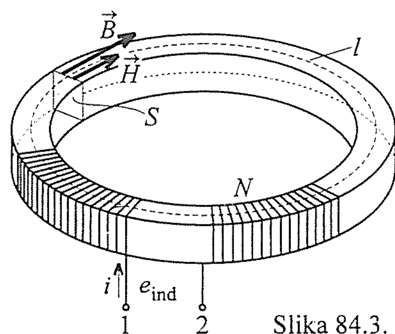
Slika 84.4.



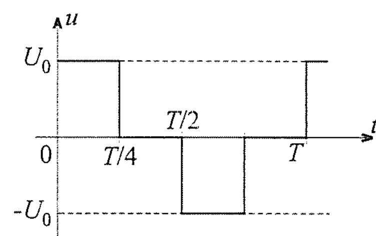
Slika 84.2.



Slika 84.5.



Slika 84.3.



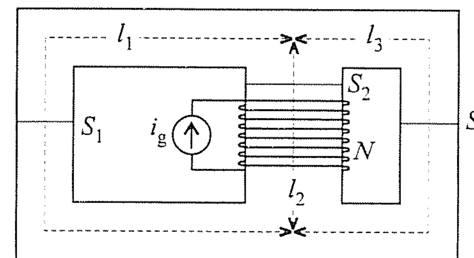
Slika 84.6.

85. Ako u namotaju magnetskog kola iz prethodnoga zadatka postoji prostoperiodična struja efektivne vrednosti I i učestanosti f, odrediti izraz za snagu gubitaka usled histerezisa u jezgru. (*P920403*)

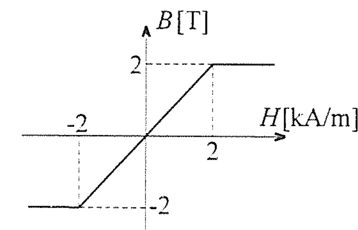
REZULTAT:
Snaga gubitaka usled histerezisa je data sledećim izrazom: $P_h = 4\mu_h f N^2 S I^2 / l$.

86. Dužine grana magnetskog kola prikazanog na slici 86.1 su $l_1 = 300$ mm, $l_2 = 50$ mm i $l_3 = 150$ mm, a površine poprečnih preseka grana iznose $S_1 = S_3 = 5\ \text{cm}^2$ i $S_2 = 10\ \text{cm}^2$. Karakteristika magnetisanja materijala od koga je načinjeno kolo prikazana je na slici 86.2. Histerezis je zanemarljivo mali. Na namotaj sa $N = 2500$ zavojaka priključen je idealni strujni generator periodične struje jačine $i_g(t)$ prikazane na slici 86.3. Izračunati i skicirati trenutnu snagu koju razvija

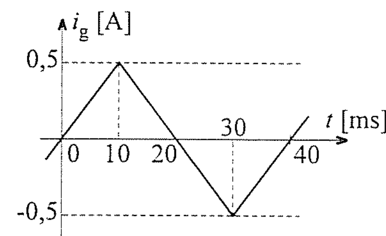
strujni generator. Zanemariti gubitke u namotaju i jezgru. (*Z950619*)



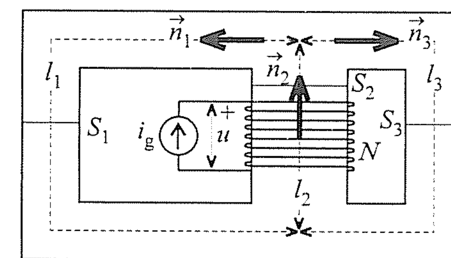
Slika 86.1.



Slika 86.2.



Slika 86.3.



Slika 86.4.

REŠENJE:
Usvojimo smerove ortova normala na poprečne preseke grana magnetskog kola kao na slici 86.4. Jednačine po Kirhofovim zakonima za ovo kolo glase:

$$B_2 S_2 = B_1 S_1 + B_3 S_3 , \tag{86.1}$$

$$H_2 l_2 + H_1 l_1 = N i_g , \tag{86.2}$$

$$H_1 l_1 - H_3 l_3 = 0 , \tag{86.3}$$

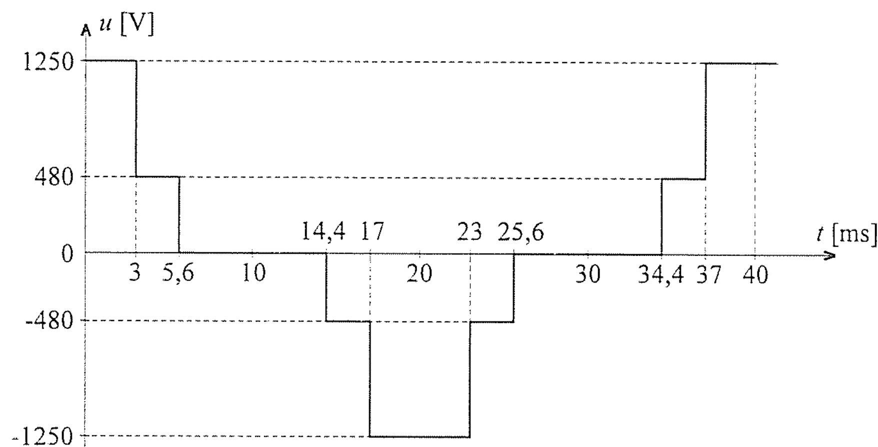
gde su B_i i H_i, $i = 1, 2, 3$, indukcije i jačine polja pojedinih grana.

Posmatrajmo prvu četvrtinu perioda ($0 \le t \le T/4 = 10$ ms), kada jačina struje generatora linearno raste od nule do $I_m = 0,5$ A. U početku tog intervala jezgro je svuda sigurno u linearnom radnom režimu. Dakle, važi

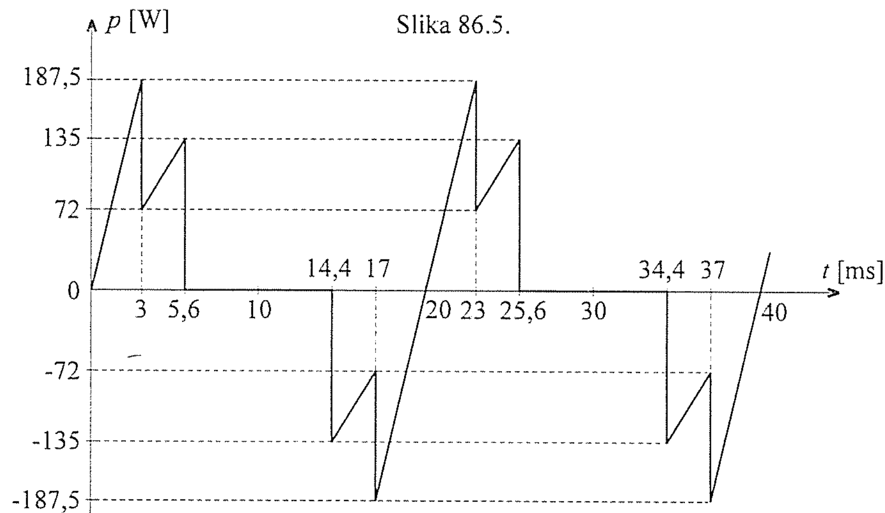
$$B_i = \mu_a H_i , \quad i = 1, 2, 3 , \tag{86.4}$$

gde je $\mu_a = 0,001$ H/m. Iz jednačina magnetskog kola dobijamo:

$$B_2 = 10 i_g , \qquad B_1 = \frac{20 i_g}{3} , \qquad B_3 = \frac{40 i_g}{3} \tag{86.5}$$



Slika 86.5.



Slika 86.6.

(i_g u A, B u T). Očigledno, magnetska indukcija je najveća u grani 3, pa do zasićenja najpre dolazi u toj grani, kada je

$$i_g^{(1)} = \frac{B_m}{\frac{40}{3}T}A = 0,15\ A \tag{86.6}$$

($B_m = 2$ T), u trenutku

$$t_1 = \frac{i_g^{(1)}}{I_m}\frac{T}{4} = 3\ ms\ . \tag{86.7}$$

Do tog trenutka indukcija B_2 linearno raste u vremenu. Stoga i fluks kroz namotaj,

$$\Phi = NB_2S_2\ , \tag{86.8}$$

linearno raste, od nule, do

$$\Phi_1 = \frac{3}{4}NB_mS_2 = 3,75\ Wb\ . \tag{86.9}$$

Kako je otpornost namotaja jednaka nuli (po uslovu zadatka gubici u namotaju su zanemarljivi), to napon idealnog strujnog generatora (u odnosu na usaglašen referentni smer – slika 86.4) iznosi

$$u = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\Phi_1}{t_1} = 1250\ V\ , \qquad 0 \le t \le t_1 \tag{86.10}$$

(slika 86.5). Pošto je napon u konstantan u intervalu vremena od $t = 0$ do t_1, trenutna snaga generatora,

$$p = ui_g\ , \tag{86.11}$$

linearno raste tokom tog vremena, od nule do 187,5 W (slika 86.6).

Posle trenutka t_1 grana 3 je u zasićenju, pa je $B_3 = 2$ T, dok je u druge dve grane radna tačka i dalje u linearnom delu karakteristike magnetisanja. Tada jednačine magnetskog kola daju:

$$B_2 = \frac{50i_g + 12}{13}\ , \qquad B_1 = \frac{100i_g - 2}{13} \tag{86.12}$$

(i_g u A, B u T). Radne tačke u granama 1 i 2 istovremeno ulaze u zasićenje, pri $i_g^{(2)} = 0,28$ A, u trenutku $t_2 = 5,6$ ms. U intervalu vremena od t_1 do t_2 fluks linearno raste od Φ_1 do $\Phi_2 = 5$ Wb, napon generatora je konstantan, $u = 480$ V, pa snaga generatora linearno raste od 72 W do 135 W (slika 86.6).

Od trenutka t_2 do isteka četvrtine perioda celo jezgro je u zasićenju, fluks kroz namotaj je konstantan, napon generatora je nula, pa je i snaga generatora nula.

U intervalu vremena od $T/4$ do $T/2 = 20$ ms jačina struje generatora linearno opada, fluks je najpre konstantan, a onda opada, tako da je snaga generatora najpre nula, a potom negativna. Funkcije $u(t)$ i $p(t)$ su u intervalu vremena $0 \le t \le T/2$ antisimetrične u odnosu na sredinu tog intervala ($t = 10$ ms), kao što je prikazano na slikama 86.5 i 86.6, respektivno.

Konačno, nije teško zaključiti da je funkcija $u(t)$ posmatrana u toku perioda T ($0 \le t \le T$) simetrična u odnosu na sredinu perioda (slika 86.5), te da u drugoj polovini perioda ($T/2 \le t \le T$) snaga generatora ima isti tok kao u njegovoj prvoj polovini. Dakle, snaga je periodična sa periodom $T_p = T/2 = 20$ ms, na osnovu čega možemo kompletirati grafik funkcije $p(t)$ na slici 86.6.

87. Na tankom torusnom jezgru, dužine srednje linije l i površine poprečnog preseka S, načinjenom od feromagnetskog materijala relativne permeabilnosti μ_r, ravnomerno i gusto su jedan preko drugoga namotana dva namotaja, sa N_1 i N_2 zavojaka. Nacrtati ekvivalentnu električnu šemu ovih spregnutih kola i odrediti izraze za sopstvene i međusobne induktivnosti namotaja. (*P960701*)

REŠENJE:
Na slici 87.1 je skiciran dati torus i označene su usvojene orijentacije namotaja. Prema ovoj slici, sopstvene i međusobne induktivnosti namotaja su

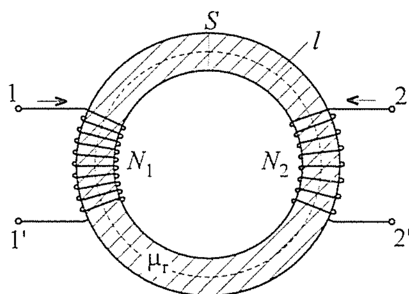
$$L_1 = \frac{\mu_r \mu_0 N_1^2 S}{l}, \quad (87.1)$$

$$L_2 = \frac{\mu_r \mu_0 N_2^2 S}{l}, \quad (87.2)$$

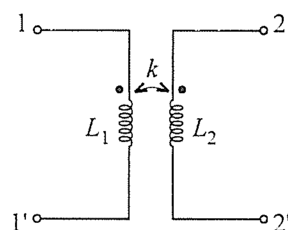
$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_r \mu_0 N_1 N_2 S}{l}. \quad (87.3)$$

Gornji izrazi se jednostavno dobijaju koristeći se definicijom (preko fluksa) odgovarajućih induktivnosti. Koeficijent sprege namotaja je $k = 1$.

Električna šema datih spregnutih kola je prikazana na slici 87.2.



Slika 87.1.



Slika 87.2.

88. Posmatra se tanko torusno jezgro sa dva namotaja sa slike 87.1. Poznato je: l, S, μ_r i $N_1 = N_2 = N$. Prvi namotaj je priključen na idaelan strujni generator prostoperiodične struje, efektivne vrednosti I_g i kružne učestanosti ω. Kolika je efektivna vrednost jačine struje kroz kratko spojene priključke drugog namotaja? (*P940919*)

REŠENJE:
Jednačina spregnutih kola za kratko spojeni sekundar (slika 88.1) u kompleksnom domenu glasi:

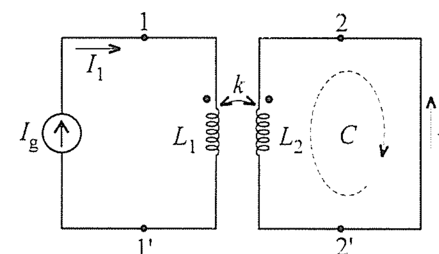
$$\mathrm{j}\omega L_{12}\underline{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2 \underline{I}_2 = 0 \quad (88.1)$$

(jednačina po drugom Kirhofovom zakonu za zatvoreni put C). Kako je, na osnovu izraza (87.3) i (87.2),

$$L_{12} = L_2 = \frac{\mu_r \mu_0 N^2 S}{l}, \quad (88.2)$$

to je tražena efektivna vrednost struje sekundara

$$I_2 = I_1 = I_g. \quad (88.3)$$



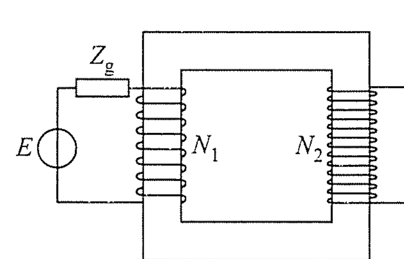
Slika 88.1.

89. Kolika je efektivna vrednost napona između otvorenih priključaka drugog namotaja za sistem sa iduktivno spregnutim kalemovima iz prethodnog zadatka? (*P950404*)

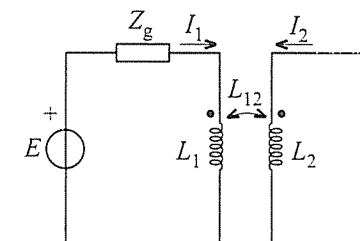
REZULTAT:
Efektivna vrednost napona praznog hoda sekundara je $U_{22'} = \omega \mu_r \mu_0 N^2 S I_g / l$.

90. Dužina srednje linije magnetskog kola prikazanog na slici 90.1 je $l = 0,5$ m, površina poprečnog preseka jezgra je $S = 2\ \mathrm{cm}^2$, a materijal od koga je načinjeno jezgro se može smatrati linearnim, relativne permeabilnosti $\mu_r = 1000$. Na jezgro su namotana dva namotaja, sa $N_1 = 500$ i $N_2 = 1000$ zavojaka. Otpornosti namotaja su zanemarljivo male. Primarni namotaj je priključen na prostoperiodični naponski generator, efektivne vrednosti elektromotorne sile $E = 20$ V, učestanosti $f = 50$ Hz i unutrašnje impedanse $\underline{Z}_g = (10 - \mathrm{j}20)\ \Omega$, dok je sekundarni namotaj kratko spojen. Izračunati (a) sopstvene induktivnosti i međusobnu induktivnost namotaja i (b) efektivnu vrednost struje kratko spojenog sekundarnog namotaja. (*Z891014*)

REŠENJE:
(a) Sopstvene induktivnosti namotaja računamo na osnovu izraza (87.1) i (87.2). Ako namotaje orijentišemo tako da je njihova međusobna induktivnost pozitivna, ova induktivnost je data izrazom (87.3). Za date brojne vrednosti imamo: $L_1 = 125,7$ mH, $L_2 = 502,7$ mH i $L_{12} = 251,3$ mH.



Slika 90.1.



Slika 90.2.

(b) Ekvivalentna šema zadatog magnetskog kola je prikazana na slici 90.2. Jednačine po drugom Kirhofovom zakonu glase:

$$\underline{E} - \underline{Z}_g \underline{I}_1 - j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega L_{12} \underline{I}_2 = 0 , \tag{90.1}$$

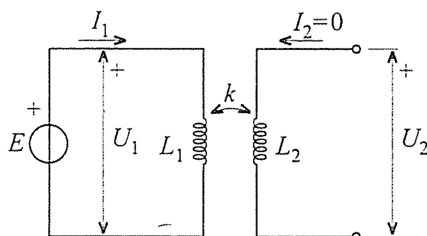
$$j\omega L_{12} \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2 = 0 , \tag{90.2}$$

u odnosu na referentne smerove struja označene na slici 90.2. Iz ovih jednačina je

$$\underline{I}_1 = -\frac{L_2 \underline{I}_2}{L_{12}} , \qquad \underline{I}_2 = -\frac{L_{12}\underline{E}}{L_2 \underline{Z}_g} , \tag{90.3}$$

imajući u vidu da je $L_1 L_2 = L_{12}^2$, pa je tražena efektivna vrednost struje sekundara

$$I_2 = \frac{L_{12} E}{L_2 |\underline{Z}_g|} = \frac{\sqrt{5}}{5}\ \mathrm{A} . \tag{90.4}$$



Slika 91.1.

91. Površina poprečnog preseka tankog torusnog jezgra je $S = 5\ \mathrm{cm}^2$, dužina srednje linije $l = 0,5$ m, a relativna permeabilnost $\mu_r = 10000$. Na jezgro su ravnomerno i gusto namotana dva namotaja. Prvi namotaj, sa $N_1 = 1000$ zavojaka, priključen je na idelalan naponski generator prostoperiodične elektromotorne sile efektivne vrednosti $E = 220$ V i učestanosti $f = 50$ Hz. Priključci drugog namotaja, koji ima $N_2 = 100$ zavojaka, su otvoreni. Zanemarujući gubitke u namotajima i jezgru, izračunati efektivne vrednosti (a) struje prvog namotaja i (b) napona između priključaka drugog namotaja. (*Z920708*)

REŠENJE:
(a) Induktivnosti namotaja iznose $L_1 = 12,56$ nH, $L_2 = 0,1256$ nH i $|L_{12}| = 1,256$ nH (znak međusobne induktivnosti nije bitan za ovaj zadatak). Struja u drugom namotaju ne postoji, pa je efektivna vrednost jačine struje prvog namotaja (slika 91.1)

$$I_1 = \frac{E}{\omega L_1} = 55,8\ \mathrm{mA} . \tag{91.1}$$

(b) Pošto se radi o savršenom transformatoru (koeficijent sprege je $k = 1$ i gubici su zanemarljivi), između efektivnih vrednosti napona na priključcima namotaja postoji sledeća veza:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} , \tag{91.2}$$

odakle je traženi napon praznog hoda sekundara

$$U_2 = \frac{N_2 E}{N_1} = 22\ \mathrm{V} . \tag{91.3}$$

92. Debelo torusno jezgro ima pravougaoni poprečni presek, kao što je prikazano na slici 92.1. Dimenzije jezgra su $a = 20$ mm, $b = 60$ mm i $h = 40$ mm, a materijal od koga je načinjeno jezgro može se smatrati linearnim, relativne permeabilnosti $\mu_r = 10000$. Na jezgro su ravnomerno i gusto namotana dva namotaja, sa $N_1 = 500$ i $N_2 = 100$ zavojaka, zanemarljivih otpornosti. Prvi namotaj je priključen na generator prostoperiodične elektromotorne sile, efektivne vrednosti $E = 50$ V, učestanosti $f = 50$ Hz i unutrašnje kompleksne impedanse $\underline{Z}_g = (10 + j0)\ \Omega$. Na drugi namotaj priključen je prijemnik kompleksne impedanse $\underline{Z}_p = (1 + j0)\ \Omega$. Izračunati aktivnu snagu prijemnika. (*Z920401*)

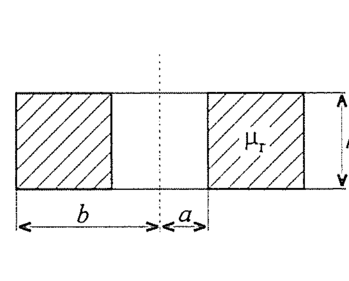
REŠENJE:
Postupkom opisanim u prethodnim zadacima, za sopstvene induktivnosti i međusobnu induktivnost namotaja dobijamo

$$L_1 = \frac{\mu_r \mu_0 N_1^2 h}{2\pi} \ln\frac{b}{a} = 22\ \mathrm{H} , \tag{92.1}$$

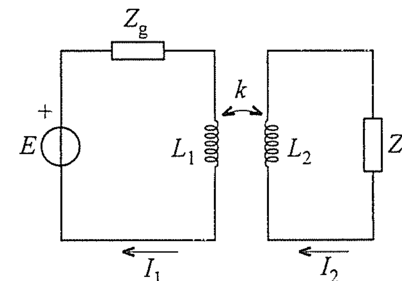
$$L_2 = \frac{\mu_r \mu_0 N_2^2 h}{2\pi} \ln\frac{b}{a} = 879\ \mathrm{mH} , \tag{92.2}$$

$$|L_{12}| = \frac{\mu_r \mu_0 N_1 N_2 h}{2\pi} \ln\frac{b}{a} = 4,4\ \mathrm{H} . \tag{92.3}$$

Koeficijent sprege namotaja je $k = 1$ (nema magnetskog rasipanja).



Slika 92.1.



Slika 92.2.

Spregnuti kalemovi, generator i prijemnik su šematski prikazani na slici 92.2. (Položaj tačaka za određivanje znaka međusobne induktivnosti nije bitan za zadatak.) Jednačine spregnutih kola sa ove slike glase:

$$\underline{E} - (\underline{Z}_g + j\omega L_1)\underline{I}_1 - j\omega L_{12}\underline{I}_2 = 0 , \tag{92.4}$$

$$\mathrm{j}\omega L_{12}\underline{I}_1 + (\underline{Z}_\mathrm{p} + \mathrm{j}\omega L_2)\underline{I}_2 = 0 \,. \tag{92.5}$$

Odavde je

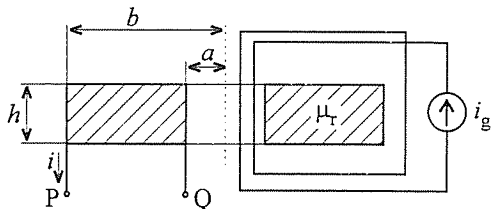
$$\underline{I}_2 = \frac{\mathrm{j}\omega L_2 \underline{E}}{\underline{Z}_\mathrm{g}\underline{Z}_\mathrm{p} + \mathrm{j}\omega(L_1\underline{Z}_\mathrm{p} + L_2\underline{Z}_\mathrm{g})} \,, \tag{92.6}$$

jer je $k = 1$. Efektivna vrednost struje prijemnika je $I_2 = 7,14$ A. Kako je prijemnik čisto rezistivan, rezistanse $R_\mathrm{p} = 1\ \Omega$, njegova reaktivna snaga je jednaka nuli. Srednja (aktivna) snaga prijemnika iznosi

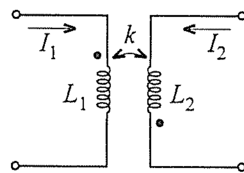
$$P_\mathrm{p} = R_\mathrm{p} I_2^2 \approx 51\ \mathrm{W} \,. \tag{92.7}$$

93. Torusno jezgro, čiji je presek prikazan na slici 93.1, ima dimenzije $a = 10$ mm, $b = 40$ mm i $h = 30$ mm. Jezgro je načinjeno od linearnog feromagnetskog materijala, relativne permeabilnosti $\mu_\mathrm{r} = 1000$. Na jezgro je ravnomerno i gusto namotano $N = 2000$ zavojaka. Priključci ovoga namotaja su na slici 93.1 označeni sa P i Q. Otpornost namotaja je zanemarljivo mala. Torus obuhvata provodnu konturu u koju je uključen idalan strujni generator prostoperiodične struje učestanosti $f = 50$ Hz. Pri tome je efektivna vrednost napona između otvorenih priključaka P i Q jednaka $U_\mathrm{PQ} = 10$ V, a početna faza $\theta_\mathrm{PQ} = \pi/2$. (a) Izračunati trenutnu jačinu struje strujnog generatora, $i_\mathrm{g}(t)$. (b) Ako se priključci P i Q kratko spoje, izračunati trenutnu jačinu struje $i(t)$ kroz kratak spoj, u ustaljenom režimu. (*Z900512*)

REZULTAT:
Pretpostavljajući da u namotaju postoji struja, jačine i, i određujući odgovarajuće magnetske flukseve, izračunavamo sopstvenu induktivnost namotaja ($L_1 = 33,27$ H) i međusobnu induktivnost namotaja i konture ($L_{12} = -33,27$ mH). Zatim, koristeći se jednačinama spregnutih kola, za trenutne jačine struje strujnog generatora i struje kratko spojenog namotaja (prema referentnom smeru sa slike 93.1) dobijamo $i_\mathrm{g}(t) = 1,353\cos(314\,t)$ A i $i(t) = 1,353\cos(314\,t)$ mA, respektivno.



Slika 93.1.



Slika 94.1.

94. Sopstvene induktivnosti dve spregnute konture, šematski prikazane na slici 94.1, su $L_1 = 1$ mH i $L_2 = 4$ mH, a koeficijent sprege je $k = 0,5$. U konturama postoje stalne struje jačina $I_1 = 2$ A i $I_2 = 1$ A. Kolika je magnetska energija ovoga sistema? (*P900512*)

REŠENJE:
Međusobna induktivnost spregnutih kontura sa slike 94.1 je

$$L_{12} = -k\sqrt{L_1 L_2} = -1\ \mathrm{mH} \,, \tag{94.1}$$

pa magnetska energija ovih kontura iznosi

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + L_{12} I_1 I_2 = 2\ \mathrm{mJ} \,. \tag{94.2}$$

95. Dva vrlo dugačka solenoida postavljena su koaksijalno, kao što je prikazano na slici 95.1. Poprečni preseci solenoida su kružni, poluprečnika $a_1 = 10$ mm, odnosno $a_2 = 50$ mm, dužina solenoida je $l = 1$ m, a brojevi zavojaka su $N_1 = 2000$ i $N_2 = 5000$, respektivno. Unutrašnjost prvog solenoida ispunjena je linearnim feromagnetskim materijalom relativne permeabilnosti $\mu_\mathrm{r} = 100$, a u ostatku prostora je vazduh. Otpornosti namotaja su zanemarljivo male. Priključci unutrašnjeg solenoida su kratko spojeni, a spoljašnji solenoid je priključen na idealan, prostoperiodičan naponski generator, efektivne vrednosti elektromotorne sile $E = 100$ V i učestanosti $f = 50$ Hz. Izračunati maksimalnu trenutnu magnetsku energiju kalemova. (*Z930921*)

REŠENJE:
Sopstvene induktivnosti solenoida sa slike 95.1, L_1 i L_2, date su izrazima (69.2) i (69.5), dok se moduo međusobne induktivnosti ovih solenoida, $|L_{12}|$, može izračunati na osnovu izraza (69.3). Za date brojne vrednosti imamo: $L_1 = 157,9$ mH, $L_2 = 1,224$ H i $|L_{12}| = 394,8$ mH (znak međusobne induktivnosti ovde nije bitan). Ekvivalentna šema induktivno spregnutih solenoida je prikazana na slici 95.2. Na osnovu jednačina spregnutih kola, jednostavno se pokazuje da je ekvivalentna induktivnost koju "vidi" idealan naponski generator

$$L_\mathrm{e} = L_2 - \frac{L_{12}^2}{L_1} = 236,9\ \mathrm{mH} \,, \tag{95.1}$$

pa efektivna vrednost struje generatora iznosi (slika 95.3)

$$I = \frac{E}{\omega L_\mathrm{e}} = 1,344\ \mathrm{A} \tag{95.2}$$

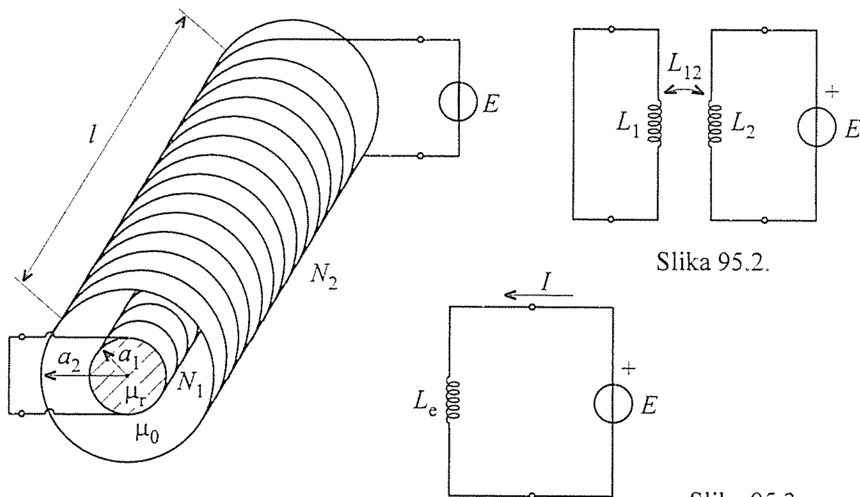
($\omega = 2\pi f$).

Trenutna ukupna magnetska energija spregnutih kalemova sa slike 95.2, $W_\mathrm{m}(t)$, jednaka je trenutnoj magnetskoj energiji kalema sa slike 95.3, $W_\mathrm{me}(t)$, pa imamo

$$W_\mathrm{m}(t) = W_\mathrm{me}(t) = \frac{1}{2}L_\mathrm{e} i^2(t) \,. \tag{95.3}$$

Stoga je tražena maksimalna magnetska energija kalemova

$$(W_\mathrm{m})_\mathrm{max} = (W_\mathrm{me})_\mathrm{max} = \frac{1}{2}L_\mathrm{e} I_m^2 = L_\mathrm{e} I^2 = 428\ \mathrm{mJ} \,, \tag{95.4}$$



Slika 95.1.

Slika 95.2.

Slika 95.3.

gde je I_m amplituda struje generatora.

Zadatak ćemo rešiti i na drugi način, računanjem energije preko magnetskog polja. Pošto je unutrašnji solenoid kratko spojen, efektivna vrednost elektromotorne sile elektromagnetske indukcije u tome solenoidu, E_{ind1}, je jednaka nuli, pa iz relacije

$$E_{ind1} = \omega\Phi_1 = \omega N_1 \mu_r \mu_0 H_1 a_1^2 \pi \qquad (95.5)$$

gde je Φ_1 efektivna vrednost magnetskog fluksa prvog namotaja, sledi da je efektivna vrednost magnetskog polja u feromagnetskom jezgru $H_1 = 0$. Stoga za efektivnu vrednost elektromotorne sile generatora možemo pisati

$$E = \omega\Phi_2 = \omega N_2 \mu_0 H_2 (a_2^2 - a_1^2)\pi \qquad (95.6)$$

(Φ_2 je efektivna vrednost magnetskog fluksa drugog namotaja), odakle je efektivna vrednost jačine magnetskog polja u prostoru između solenoida $H_2 = 6.72$ kA/m. Magnetsko polje izvan spoljašnjeg solenoida ne postoji, pa maksimalna magnetska energija datoga sistema iznosi

$$(W_m)_{max} = \frac{1}{2}\mu_0 H_{2m}^2 (a_2^2 - a_1^2)\pi l = \mu_0 H_2^2 (a_2^2 - a_1^2)\pi l = 428 \text{ mJ}, \qquad (95.7)$$

gde je H_{2m} amplituda jačine magnetskog polja u prostoru između solenoida.

Kako je $H_2 = N_2 I / l$ i $L_e = \Phi_2 / I$, to iz (95.6) sledi

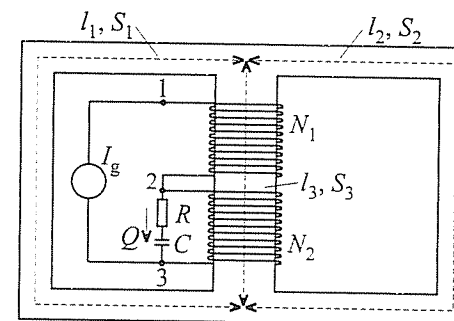
$$L_e = \mu_0 \frac{N_2^2}{l}(a_2^2 - a_1^2)\pi. \qquad (95.8)$$

Nije teško pokazati, sada, da zaista važi relacija

$$L_e = L_2 - \frac{L_{12}^2}{L_1} = L_2(1 - k^2), \qquad (95.9)$$

gde je k koeficijent induktivne spege namotaja, dat izrazom (69.6).

96. Za magnetsko kolo prikazano na slici 96.1 poznato je: $l_1 = l_2 = 0.5$ m, $l_3 = 0.2$ m, $S_1 = S_2 = 15\ \text{cm}^2$ i $S_3 = 30\ \text{cm}^2$. Materijal od koga je načinjeno jezgro može se smatrati linearnim, relativne permeabilnosti $\mu_r = 5000$. Na srednjem stubu jezgra se nalaze dva namotaja, sa $N_1 = 120$ zavojaka, odnosno $N_2 = 130$ zavojaka. Namotaji, otpornik otpornosti $R = 230\ \Omega$, kondenzator reaktanse $X = -300\ \Omega$ i idealan strujni generator prostoperiodične struje učestanosti $f = 50$ Hz vezani su kao na slici 96.1. Gubici u namotajima i jezgru su zanemarljivo mali. Magnetsko rasipanje je, takođe, zanemarljivo malo. Odrediti kompleksni napon između krajeva strujnog generatora tako da kompleksna opterećenost kondenzatora bude $\underline{Q} = -(1 + \mathrm{j})$ mC. (*Z940620*)



Slika 96.1.

REŠENJE:

Slika 96.2 prikazuje ekvivalentnu šemu kola sa slike 96.1. U cilju određivanja induktivnosti namotaja, uočimo da je paralelnoj vezi grana 1 i 2 magnetskog kola ekvivalentna jedna grana, dužine $l_e = l_1$ i površine poprečnog preseka $S_e = 2S_1$ (paralelnoj vezi dve grane istih reluktansi, $R_{m1} = R_{m2}$, ekvivalentna je grana sa reluktansom $R_{me} = R_{m1}/2$). Kako je i $S_3 = 2S_1$, to se magnetsko kolo sa slike 96.1 svodi na prosto magnetsko kolo, srednje dužine magnetskih linija $l = l_e + l_3$ i površine poprečnog preseka $S = S_3$, pa induktivnosti namotaja, date izrazima (87.1)-(87.3), iznose $L_1 = 0,388$ H, $L_2 = 0,455$ H i $L_{12} = 0,420$ H. Koeficijent sprege namotaja je $k = 1$.

Kompleksna jačina struje kondenzatora je (slika 96.2)

$$\underline{I} = \mathrm{j}\omega\underline{Q} = \mathrm{j}2\pi f\underline{Q} = 0.314(1 - \mathrm{j})\ \text{A}, \qquad (96.1)$$

pa je kompleksni napon između priključaka drugog namotaja

$$\underline{U}_2 = \left(R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)\underline{I} = (R + \mathrm{j}X)\underline{I} = -(22 + \mathrm{j}166.4)\ \text{V}. \qquad (96.2)$$

Kirhofovi zakoni za spregnuta kola sa slike 96.2 daju

$$\underline{I}_g = \underline{I}_2 + \underline{I} \, , \tag{96.3}$$

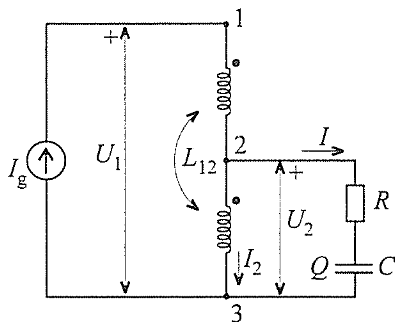
$$-j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega L_{12} \underline{I}_g + \underline{U}_2 = 0 \, , \tag{96.4}$$

odakle je

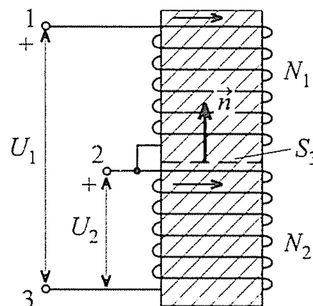
$$\underline{I}_g = \frac{\underline{U}_2 + j\omega L_2 \underline{I}}{j\omega (L_2 + L_{12})} = -(0,442 + j0,083) \text{ A} \, . \tag{96.5}$$

Konačno, kompleksni napon strujnog generatora iznosi

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + j\omega L_1 \underline{I}_g + j\omega L_{12} (\underline{I}_g - \underline{I}) = -(42,3 + j320) \text{ V} \, . \tag{96.6}$$



Slika 96.2.



Slika 96.3.

Zadatak se može rešiti i na drugi način, uočavajući da je magnetski fluks kroz svaki zavojak oba namotaja na srednjem stubu jezgra isti. Označimo ovaj fluks sa $\underline{\Phi}_j$, pri čemu je normala na površ poprečnog preseka jezgra usmerena kao na slici 96.3. Pošto se gubici u namotajima mogu zanemariti, za kompleksne napone primara, koji obuhvata oba namotaja na jezgru, i sekundara, koji ima N_2 zavojaka, sada možemo pisati

$$\underline{U}_1 = -\underline{E}_{\text{ind13}} = j\omega (N_1 + N_2) \underline{\Phi}_j \, , \tag{96.7}$$

$$\underline{U}_2 = -\underline{E}_{\text{ind23}} = j\omega N_2 \underline{\Phi}_j \, , \tag{96.8}$$

gde su $\underline{E}_{\text{ind13}}$ i $\underline{E}_{\text{ind23}}$ kompleksne elektromotorne sile indukovane u primaru i sekundaru, respektivno. Odavde sledi

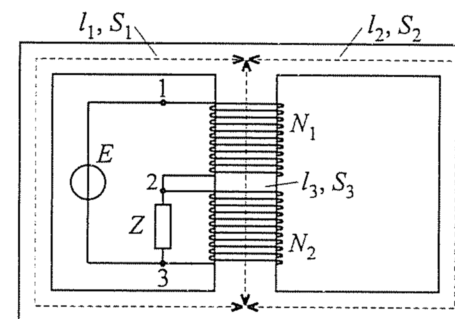
$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_2} \tag{96.9}$$

(veza između kompleksnih napona na priključcima primara i sekundara savršenog autotransformatora), pa je, na osnovu (96.2), traženi kompleksni napon

$$\underline{U}_1 = \frac{N_1 + N_2}{N_2} \underline{U}_2 = -(42,3 + j320) \text{ V} \, . \tag{96.10}$$

97. Posmatra se autotransformator sa slike 97.1. Parametri magnetskog kola dati su u tekstu prethodnog zadatka. Efektivna vrednost prostoperiodične elektromotorne sile idealnog naponskog generatora na koji je priključen primar je $E = 220$ V, a učestanost $f = 50$ Hz. Kompleksna impedansa prijemnika vezanog u kolo sekundara iznosi $\underline{Z} = (230 + j300)$ Ω. Izračunati kompleksnu prividnu snagu generatora. (*Z900905*)

REZULTAT:
Kompleksna prividna snaga koju razvija idealan naponski generator je $\underline{S}_E = (21 + j119)$ VA.



Slika 97.1.

4. NAIZMENIČNE STRUJE

98. Izračunati (a) srednju i (b) efektivnu vrednost periodičnog napona prikazanog na slici 98.1. (*P900928*)

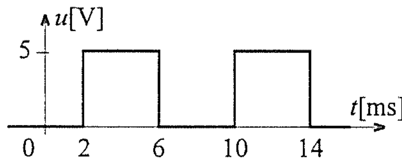
REŠENJE:
(a) Uočimo da period napona $u(t)$ iznosi $T = 8$ ms. Srednja vrednost ovoga napona je

$$U_{\mathrm{sr}} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} u\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T/2} U_{\mathrm{m}}\,\mathrm{d}t = \frac{U_{\mathrm{m}}}{2} = 2.5\ \mathrm{V}\,, \qquad (98.1)$$

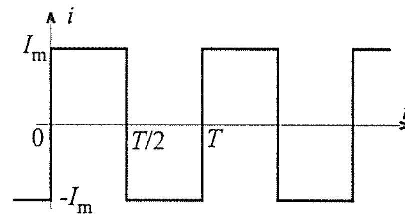
gde je $t_1 = 2$ ms i $U_{\mathrm{m}} = 5$ V.

(b) Efektivna vrednost napona $u(t)$ iznosi

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} u^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T/2} U_{\mathrm{m}}^2\,\mathrm{d}t} = \frac{\sqrt{2}}{2}U_{\mathrm{m}} = 3,535\ \mathrm{V}\,. \qquad (98.2)$$



Slika 98.1.



Slika 99.1.

99. Odrediti srednju i efektivnu vrednost periodične struje prikazane na slici 99.1.

REZULTAT:
Srednja i efektivna vrednost struje $i(t)$ su $I_{\mathrm{sr}} = 0$ i $I = I_{\mathrm{m}}$, respektivno.

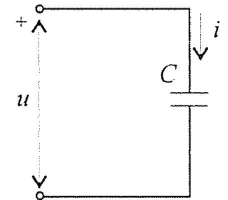
100. Kolika je srednja, a kolika efektivna vrednost periodičnog napona, perioda T, koji je definisan izrazima $u(t) = U_{\mathrm{m}}\sin\omega t$ za $0 \leq t \leq T/2$ i $u(t) = 0$ za $T/2 < t < T$, pri čemu je $\omega T = 2\pi$? (*P930522*)

REZULTAT:
Srednja vrednost datoga napona iznosi $U_{\mathrm{sr}} = U_{\mathrm{m}}/\pi = 0,318U_{\mathrm{m}}$, dok je efektivna vrednost $U = U_{\mathrm{m}}/2$.

101. Kondenzator kapacitivnosti $C = 10\ \mu$F, prikazan na slici 101.1, priključen je na periodičan testerasti napon, perioda $T = 4$ ms i amplitude $U_{\mathrm{m}} = 10$ V, prikazan na slici 101.2. Izračunati i skicirati jačinu struje i snagu kondenzatora u funkciji vremena. (*P970621*)

REŠENJE:
Prema slici 101.1, jačina struje kondenzatora je

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \qquad (101.1)$$



Slika 101.1.

i predstavlja povorku pravougaonih impulsa, amplitude $I_{\mathrm{m}} = 4CU_{\mathrm{m}}/T = 0,1$ A (slika 101.3). Trenutna snaga kondenzatora,

$$p(t) = u(t)i(t)\,, \qquad (101.2)$$

prikazana je na slici 101.4, pri čemu je $P_{\mathrm{m}} = U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}} = 1$ W.

Preporučuje se čitaocu da, kao vežbu, izračuna efektivnu vrednost napona kondenzatora.

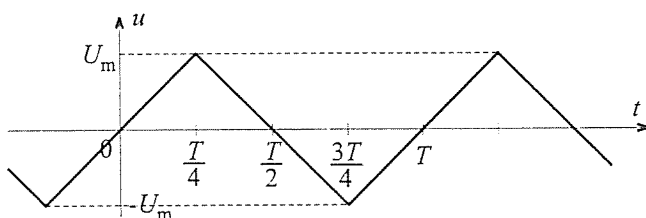
102. Jačina struje kalema, induktivnosti $L = 1$ mH, je periodična funkcija prikazana na slici 102.1. Skicirati, u funkciji vremena, napon kalema (u odnosu na referentni smer usaglašen sa referentnim smerom struje) i snagu koju kalem prima. (*P960925*)

REŠENJE:
Napon kalema, usaglašen po referetnom smeru sa jačinom struje kalema, je je

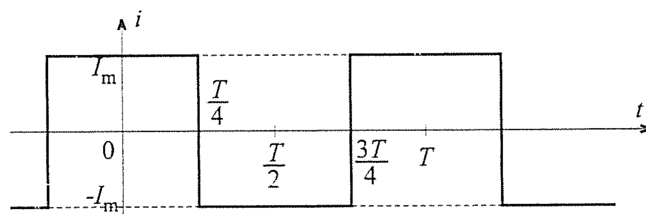
$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\,. \qquad (102.1)$$

Zavisnost ovoga napona od vremena je prikazana na slici 102.2. Trenutna snaga kalema, data izrazom (101.2), prikazana je na slici 102.3.

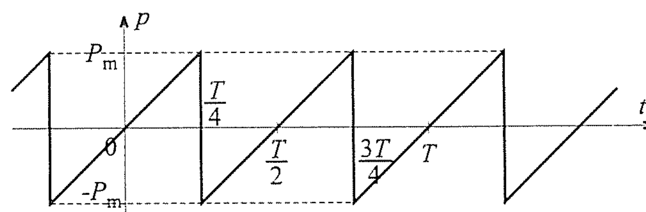
Čitaocu se preporučuje da izračuna srednju vrednost struje kalema.



Slika 101.2.



Slika 101.3.



Slika 101.4.

103. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 103.1 dve uzastopne nule elektromotorne sile su u trenucima $t_1 = 0$ i $t_2 = 20\ \mu s$. Jedna nula napona kondenzatora je u trenutku $t_3 = 5\ \mu s$, a maksimum u $t_4 = 15\ \mu s$. U kojim trenucima, u intervalu vremena $-10\ \mu s \leq t \leq 40\ \mu s$, napon otpornika ima (a) nule i (b) maksimume? (*P970621*)

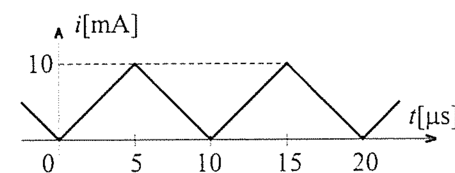
REŠENJE:
U datome kolu, period prostoperiodične struje je

$$T = 2(t_2 - t_1) = 40\ \mu s\ . \tag{103.1}$$

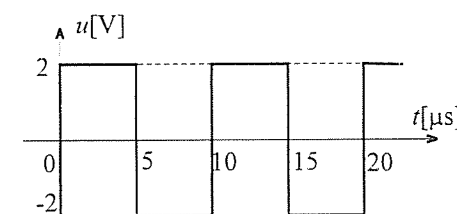
Kako je

$$\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}_C} = \frac{R}{1/(j\omega C)} = j\omega RC\ , \tag{103.2}$$

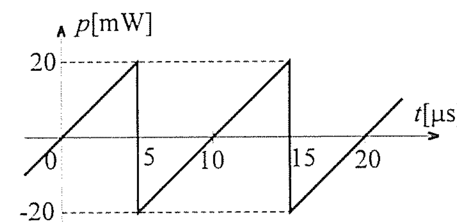
to napon otpornika fazno prednjači naponu kondenzatora za $\pi/2$, što znači da prednjači u vremenu za $\Delta t = T/4 = 10\ \mu s$. Posmatrajući zadati interval vremena, nule napona otpornika su u trenucima $t_5 = t_3 - \Delta t = -5\ \mu s$, $t_6 = t_5 + T/2 = 15\ \mu s$ i $t_7 = t_5 + T = 35\ \mu s$, a maksimum u $t_8 = t_4 - \Delta t = 5\ \mu s$.



Slika 102.1.



Slika 102.2.



Slika 102.3.

104. Idealni kalem i kondenzator su vezani na red i priključeni na prostoperiodičan napon $u(t) = 20 \sin \omega t$ V, gde je $\omega = 10^5\ s^{-1}$, kao što je prikazano na slici 104.1. Poznat je napon kalema $u_L(t) = 10\cos(\omega t + \pi/2)$ V, a maksimalna trenutna energija kondenzatora iznosi $W_{C\max} = 450\ \mu J$. Izračunati induktivnost kalema. (*P960904*)

REŠENJE:
Trenutni napon kondenzatora je

$$u_C(t) = u_{12}(t) = -u_L(t) + u(t) = 30 \sin \omega t\ \text{V}\ , \tag{104.1}$$

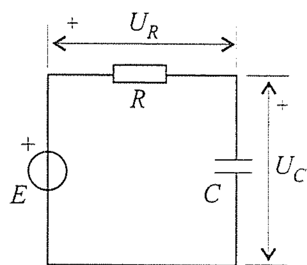
pa je amplituda ovoga napona $U_{C\mathrm{m}} = 30$ V. Maksimalna trenutna energija kondenzatora je data sa

$$W_{C\max} = \frac{1}{2} C U_{C\mathrm{m}}^2\ , \tag{104.2}$$

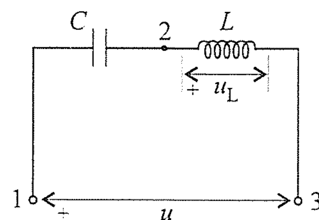
odakle za kapacitivnost kondenzatora dobijamo $C = 1\ \mu F$. Kompleksna impedansa kondenzatora iznosi $\underline{Z}_C = -j/(\omega C) = -j\,10\ \Omega$.

Za razdelnik napona sa slike 104.1 imamo

$$\frac{\underline{U}_L}{\underline{U}} = \frac{(10/\sqrt{2})\, e^{j\pi/2}}{(20/\sqrt{2})\, e^{-j\pi/2}} = -\frac{1}{2} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L}\ . \tag{104.3}$$



Slika 103.1.



Slika 104.1.

Odavde je kompleksna impedansa kalema $\underline{Z}_L = \mathrm{j}\,10/3\ \Omega$. Kako je $\underline{Z}_L = \mathrm{j}\omega L$, to tražena induktivnost kalema iznosi $L = 100/3\ \mu\mathrm{H}$.

105. Redna veza otpornika otpornosti $R = 10\ \Omega$ i kalema induktivnosti $L = 1$ mH priključena je na idealan naponski generator elektromotorne sile $e(t) = 100\cos(\omega t + \pi/4)$ V, gde je $\omega = 10^4\ \mathrm{s}^{-1}$. Kolika je elektromotorna sila u trenucima u kojima je energija kalema maksimalna? (*P960701*)

REŠENJE:
Kako je argument kompleksne impedanse date redne veze

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R} = \frac{\pi}{4}\,, \qquad (105.1)$$

to je početna faza struje redne veze, za referentni smer koji se poklapa sa referentnim smerom elektromotorne sile generatora, $\psi = \theta_E - \varphi = 0$. Stoga, energija kalema

$$W_L(t) = \frac{1}{2}Li(t)^2\,, \qquad (105.2)$$

ima maksimum kada je $|\cos\omega t| = 1$, pa tada elektromotorna sila generatora iznosi $e = \pm 100\cos(\pi/4)\ \mathrm{V} = \pm 70,71$ V.

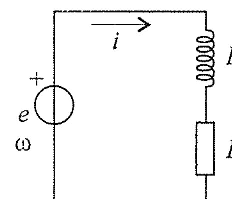
106. Redna veza otpornika otpornosti $R = 1\ \mathrm{k}\Omega$ i kondenzatora kapacitivnosti $C = 1$ nF priključena je na idealan, prostoperiodičan naponski generator efektivne vrednosti elektromotorne sile $E = 1$ V i kružne učestanosti $\omega = 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$. Kolika je trenutna elektromotorna sila kada je jačina struje otpornika jednaka nuli? (*P950903*)

REZULTAT:
Kada je jačina struje jednaka nuli, elektromotorna sila iznosi ± 1 V.

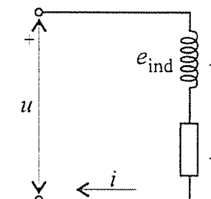
107. Za kolo prostoperiodične struje sa slike 107.1 je poznato: $I = 0,1$ A, $\omega = 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$, $L = 10\ \mu$H i $R = 1\ \mathrm{k}\Omega$. Izračunati trenutnu elektromotornu silu generatora kada je jačina struje u kolu jednaka nuli i nalazi se u stadijumu porasta. (*P950123*)

REŠENJE:
Usvajajući da je početna faza struje u kolu $\psi = -\pi/2$, imamo $i(t) = I\sqrt{2}\sin\omega t$. Očigledno, u trenutku $t_1 = 0$ je struja jednaka nuli i nalazi se u stadijumu porasta. Tada je trenutna elektromotorna sila generatora data izrazom (102.1) i iznosi

$$e(t_1) = \omega LI\sqrt{2}\cos\omega t_1 = \sqrt{2}\omega LI = 1,414\ \mathrm{V}\,. \qquad (107.1)$$



Slika 107.1.



Slika 108.1.

108. Realan kalem induktivnosti $L = 30$ mH i otpornosti $R = 40\ \Omega$ priključen je na prostoperiodičan napon efektivne vrednosti $U = 100$ V i kružne učestanosti $\omega = 1000\ \mathrm{s}^{-1}$. Izračunati intenzitet napona između krajeva kalema u trenucima u kojima je elektromotorna sila samoindukcije maksimalna. (*P940130*)

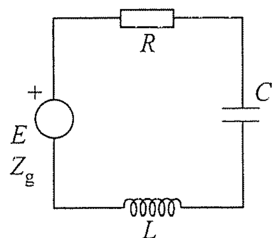
REŠENJE:
Kada je elektromotorna sila samoindukcije, e_{ind}, maksimalna, struja kalema je jednaka nuli, pa je napon kalema (slika 108.1)

$$u = -(E_{\mathrm{ind}})_{\mathrm{m}} = -\omega LI\sqrt{2} = \frac{-\sqrt{2}\omega LU}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = -84,85\ \mathrm{V}\,. \qquad (108.1)$$

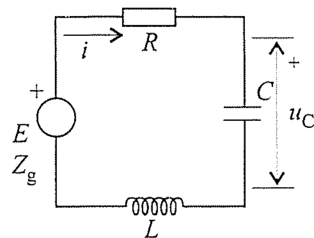
109. Otpornik otpornosti $R = 1\ \Omega$, kalem impedanse $Z_L = 10\ \Omega$, kondenzator impedanse $Z_C = 5\ \Omega$ i naponski generator prostoperiodične elektromotorne sile ekfektivne vrednosti $E = 5$ V i unutrašnje kompleksne impedanse $\underline{Z}_{\mathrm{g}} = (4 - \mathrm{j}\,5)\ \Omega$ obrazuju prosto kolo prikazano na slici 109.1. Kolika je trenutna snaga otpornika otpornosti R u trenucima kada je napon kondenzatora jednak nuli? (*P930221*)

REŠENJE:
Kada je napon kondenzatora jednak nuli, jačina struje u kolu (slika 109.2) je

$$i = \pm\omega CU_C\sqrt{2} = \frac{\pm\sqrt{2}U_C}{Z_C}\,, \qquad (109.1)$$



Slika 109.1.



Slika 109.2.

gde je U_C efektivna vrednost napona kondenzatora, a ω kružna učestanost generatora. Iz relacije

$$\underline{U}_C = \frac{-\mathrm{j}Z_C}{R + \mathrm{j}Z_L - \mathrm{j}Z_C + \underline{Z}_g}\underline{E} = -\mathrm{j}\underline{E} \qquad (109.2)$$

sledi $U_C = E$. Trenutna snaga otpornika u trenucima kada je napon kondenzatora jednak nuli iznosi

$$p_R = Ri^2 = \frac{2RE^2}{Z_C^2} = 2\ \mathrm{W}\,. \qquad (109.3)$$

110. Prijemnik nepoznate impedanse priključen je na prostoperiodičan napon efektivne vrednosti $U = 100$ V. U trenutku kada je napon maksimalan, jačina struje prijemnika je $i(t_1) = 10$ mA i opada, a u trenutku kada je jačina struje maksimalna, napon je $u(t_2) = 100$ V. Referentni smerovi za napon i struju su usaglašeni. Izračunati kompleksnu impedansu prijemnika. (*P920627*)

REŠENJE:
Ako usvojimo da je početna faza struje prijemnika jednaka nuli, za trenutnu struju i trenutni napon prijemnika imamo

$$i(t) = \frac{U}{Z}\sqrt{2}\cos\omega t\,, \qquad u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)\,, \qquad (110.1)$$

gde su Z i φ moduo i argument kompleksne impedanse prijemnika, respektivno $(-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2)$.

U trenutku kada je jačina struje maksimalna imamo

$$u(t_2) = U\sqrt{2}\cos\varphi\,, \qquad (110.2)$$

odakle je $\cos\varphi = \sqrt{2}/2$.

Jačina struje u trenutku kada je napon maksimalan iznosi

$$i(t_1) = \frac{U}{Z}\sqrt{2}\cos(-\varphi)\,, \qquad (110.3)$$

pa je $Z = U/i(t_1) = 10\ \mathrm{k\Omega}$. Iz uslova da je izvod struje u tome trenutku negativan,

$$\frac{-\omega U\sqrt{2}}{Z}\sin(-\varphi) < 0\,, \qquad (110.4)$$

sledi da je ugao φ negativan, pa je $\sin\varphi = -\sqrt{2}/2$.

Konačno, kompleksna impedansa prijemnika iznosi

$$\underline{Z} = Z(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) = 5\sqrt{2}(1 - \mathrm{j})\ \mathrm{k\Omega}\,. \qquad (110.5)$$

111. Prijemnik kompleksne impedanse $\underline{Z} = (20 - \mathrm{j}\,20)\ \Omega$ priključen je na prostoperiodičan napon efektivne vrednosti $U = 100$ V, učestanosti $f = 50$ Hz i početne faze $\theta = \pi$. Izračunati (a) aktivnu snagu, (b) reaktivnu snagu, (c) prividnu snagu, (d) kompleksnu prividnu snagu i (e) faktor reaktivnosti prijemnika. (*P960904*)

REŠENJE:
Kompleksna admitansa prijemnika je

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = (25 + \mathrm{j}\,25)\ \mathrm{mS}\,, \qquad (111.1)$$

pa je kompleksna prividna snaga prijemnika

$$\underline{S} = \underline{Y}^* U^2 = (250 - \mathrm{j}\,250)\ \mathrm{VA} = P + \mathrm{j}Q\,. \qquad (111.2)$$

Aktivna, reaktivna i prividna snaga su $P = 250$ W, $Q = -250$ VAr i $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 250\sqrt{2}$ VA, respektivno. Konačno, faktor reaktivnosti prijemnika iznosi

$$k_r = \frac{Q}{S} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,. \qquad (111.3)$$

112. Pretežno kapacitivan prijemnik impedanse $Z = 1\ \mathrm{k\Omega}$ i faktora snage $k = \sqrt{3}/2$ priključen je na prostoperiodičan napon efektivne vrednosti $U = 10$ kV, učestanosti $f = 50$ Hz i početne faze $\theta = \pi/3$. Izračunati (a) trenutnu, (b) aktivnu, (c) reaktivnu, (d) kompleksnu i (e) prividnu snagu prijemnika. (*P970423*)

REŠENJE:
Pošto je prijemnik pretežno kapacitivan, faktor reaktivnosti prijemnika je negativan i iznosi

$$k_r = -\sqrt{1 - k^2} = -\frac{1}{2}\,. \qquad (112.1)$$

Argument kompleksne impedanse prijemnika je

$$\varphi = \arcsin k_r = -\frac{\pi}{6}\,. \qquad (112.2)$$

Stoga je trenutna snaga prijemnika

$$p(t) = \underbrace{U\sqrt{2}\cos(2\pi f t + \theta)}_{u(t)}\,\underbrace{YU\sqrt{2}\cos(\omega t + \theta - \varphi)}_{i(t)}$$

$$= 200\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{kW} \qquad (112.3)$$

(t u s), gde je $i(t)$ jačina struje prijemnika čiji je referentni smer usaglašen sa referentnim smerom napona $u(t)$, dok je $Y = 1/Z = 1$ mS admitansa prijemnika. Prividna snaga prijemnika iznosi

$$S = YU^2 = 100\ \text{kVA}\ . \qquad (112.4)$$

Kompleksna prividna snaga prijemnika je

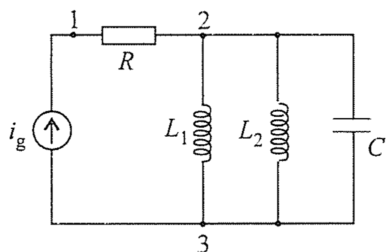
$$\underline{S} = S(k + \mathrm{j}k_r) = 50(\sqrt{3} - \mathrm{j})\ \text{kVA}\ , \qquad (112.5)$$

odakle za aktivnu i reaktivnu snagu prijemnika dobijamo $P = 50\sqrt{3}$ kW i $Q = -50$ kVAr, respektivno.

113. Trenutni napon i trenutna jačina struje prijemnika su $u(t) = 30\sin(\omega t + \pi/3)$ V i $i(t) = 6\cos(\omega t - \pi/3)$ A, respektivno. Referentni smerovi napona i struje su usaglašeni. Izračunati (a) srednju snagu, (b) reaktivnu snagu, (c) konduktansu i (d) susceptansu prijemnika. (e) Odrediti karakter prijemnika. (*P960917*)

REZULTAT:
(a)-(b) Srednja i reaktivna snaga prijemnika su $P = 45\sqrt{3}$ W i $Q = 45$ VAr, respektivno. (c)-(d) Konduktansa prijemnika je $G = 100\sqrt{3}$ mS, a susceptansa $B = -100$ mS. (e) Radi se o pretežno induktivnom prijemniku.

114. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 114.1 je $\underline{I}_g = (1 - \mathrm{j})$ A, $\omega = 10^7\ \text{s}^{-1}$, $R = 10\ \Omega$, $L_1 = 1\ \mu$H, $L_2 = 2\ \mu$H i $C = 5$ nF. Izračunati (a) aktivnu, (b) reaktivnu, (c) kompleksnu, (d) prividnu i (e) trenutnu snagu idealnog strujnog generatora. (*P940616*)



Slika 114.1.

REŠENJE:
Kompleksna impedansa koju "vidi" idealan strujni generator je

$$\underline{Z}_{e13} = R + \frac{1}{1/(\mathrm{j}\omega L_1) + 1/(\mathrm{j}\omega L_2) + \mathrm{j}\omega C}$$

$$= R + \mathrm{j}\,\frac{\omega L_1 L_2}{L_1 + L_2 - \omega^2 L_1 L_2 C} = (10 + \mathrm{j}\,10)\ \Omega\ . \qquad (114.1)$$

Napon generatora, za usaglašene smerove napona i struje generatora, iznosi

$$\underline{U}_{13} = \underline{Z}_{e13}\underline{I}_g = 20\ \text{V}\ , \qquad (114.2)$$

pa je kompleksna prividna snaga generatora

$$\underline{S} = \underline{U}_{13}\underline{I}_g^* = (20 + \mathrm{j}\,20)\ \text{VA}\ . \qquad (114.3)$$

Aktivna, reaktivna i prividna snaga generatora iznose $P = 20$ W, $Q = 20$ VAr i $S = 20\sqrt{2}$ VA, respektivno. Konačno, trenutna snaga koju razvija idealan strujni generator je

$$p(t) = u_{13}(t)i_g(t) = 40\sqrt{2}\cos 10^7 t\,\cos(10^7 t - \pi/4)\ \text{W}\ . \qquad (114.4)$$

115. Reaktansa jednog prijemnika je $X = 100\ \Omega$, a susceptansa $B = -1$ mS. Kolike su rezistansa, impedansa, konduktansa i admitansa tog prijemnika? (*P930926*)

REŠENJE:
Iz relacije

$$B = -\frac{X}{R^2 + X^2} \qquad (115.1)$$

dobijamo da rezistansa datog prijemnika iznosi

$$R = \sqrt{-\frac{X}{B} - X^2} = 300\ \Omega\ . \qquad (115.2)$$

Impedansa prijemnika je

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = 100\sqrt{10}\ \Omega\ . \qquad (115.3)$$

Konduktansa i admitansa prijemnika su, redom, $G = R/Z^2 = 3$ mS i $Y = 1/Z = \sqrt{10}$ mS.

116. Poznat je kompleksni napon $\underline{U} = (-1 + \mathrm{j})$ V i trenutna jačina struje $i(t) = \sin\omega t$ mA prijemnika prikazanog na slici 116.1. Izračunati kompleksnu impedansu prijemnika. (*P930624*)

REZULTAT:
Kompleksna impedansa prijemnika je $\underline{Z} = \sqrt{2}(1 + \mathrm{j})$ kΩ.

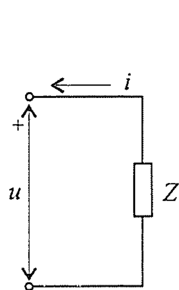
117. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 117.1 je $\omega = 10^6\ \text{s}^{-1}$, $R = 10\ \Omega$, $U_R = 1$ mV i $U_L = 2U_C = 4$ mV. Izračunati E, L i C. (*P950404*)

REŠENJE:
Iz relacija

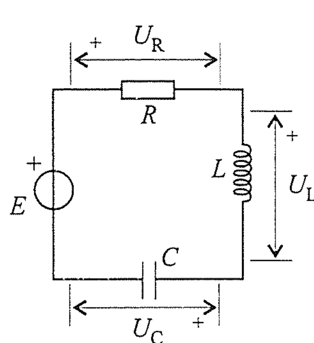
$$\frac{U_L}{U_R} = \frac{\omega L}{R} \quad \text{i} \quad \frac{U_C}{U_R} = \frac{1}{\omega C R} \qquad (117.1)$$

dobijamo, redom, $L = 40\ \mu$H i $C = 50$ nF. Na osnovu fazorskog dijagrama napona (slika 117.2) je

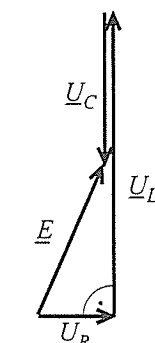
$$E = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{5}\ \text{mV}\ . \qquad (117.2)$$



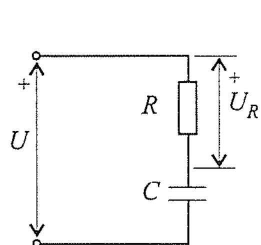
Slika 116.1.



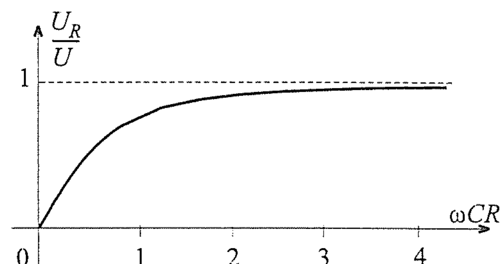
Slika 117.1.



Slika 117.2.



Slika 118.1.



Slika 118.2.

118. U kolu prikazanom na slici 118.1 poznato je R, C i ω. (a) Koliki je odnos efektivnih vrednosti napona otpornika (U_R) i napona redne veze (U)? (b) Skicirati zavisnost odnosa U_R/U od proizvoda ωCR. (*P950614*)

REŠENJE:
(a) Iz relacije

$$\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} = \frac{\mathrm{j}\omega CR}{1+\mathrm{j}\omega CR} \tag{118.1}$$

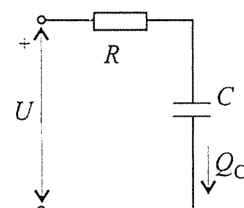
sledi

$$\frac{U_R}{U} = \frac{\omega CR}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}} \,. \tag{118.2}$$

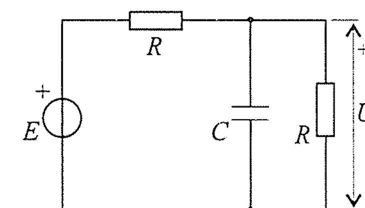
(b) Zavisnost odnosa U_R/U od proizvoda ωCR je prikazana na slici 118.2.

119. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 119.1 poznato je: $R = 10\ \mathrm{k\Omega}$, $C = 2\ \mu\mathrm{F}$, $\omega = 100\ \mathrm{s^{-1}}$ i $\underline{Q}_C = (0,2+\mathrm{j}\,0,6)$ mC. Izračunati kompleksni napon $\underline{U}$. (*P910927*)

REZULTAT:
Traženi napon je $\underline{U} = (-500+\mathrm{j}\,500)$ V.



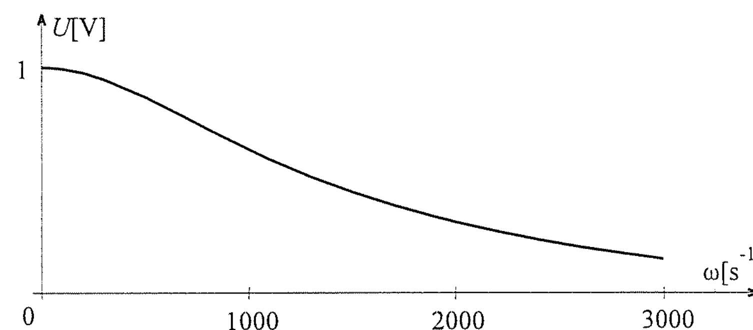
Slika 119.1.



Slika 120.1.

120. U kolu prostoperiodične struje sa slike 120.1 je $E = 2$ V, $R = 2\ \mathrm{k\Omega}$ i $C = 1\ \mu\mathrm{F}$, a kružna učestanost generatora, ω, se može menjati. Skicirati zavisnost efektivne vrednosti napona U od ω. (*P960925*)

REZULTAT:
Tražena zavisnost je prikazana na slici 120.2.



Slika 120.2.

121. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 121.1 poznata je kompleksna prividna snaga idealnog naponskog generatora $\underline{S}_E = (60-\mathrm{j}\,80)$ VA, kružna učestanost $\omega = 10^4\ \mathrm{s^{-1}}$ i otpornost otpornika $R = 15\ \Omega$. Izračunati efektivnu vrednost elektromotorne sile generatora i kapacitivnost kondenzatora. (*P900928*)

REŠENJE:
Po teoremi održanja snage, srednja snaga otpornika je

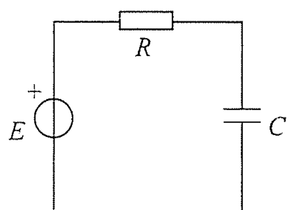
$$P_R = P_E = \mathrm{Re}\{\underline{S}_E\} = 60\ \mathrm{W}\,, \tag{121.1}$$

pa za efektivnu vrednost struje u kolu imamo

$$I = \sqrt{\frac{P_R}{R}} = 2\ \mathrm{A}\,. \tag{121.2}$$

Sada je

$$E = \frac{S_E}{I} = 50\ \text{V} . \qquad (121.3)$$



Slika 121.1.

Kako impedansa redne veze otpornika i kondenzatora iznosi

$$Z = \frac{E}{I} = 25\ \Omega , \qquad (121.4)$$

to je reaktansa kondenzatora

$$X = -\sqrt{Z^2 - R^2} = -20\ \Omega , \qquad (121.5)$$

pa dobijamo

$$C = \frac{1}{\omega |X|} = 5\ \mu\text{F} . \qquad (121.6)$$

122. Redna veza dva prijemnika priključena je na prostoperiodičan napon. Aktivna snaga i susceptansa redne veze su $P_e = 5$ W i $B_e = -125\ \mu$S, respektivno. Impedansa prvog prijemnika je $Z_1 = 3\sqrt{5}\ \Omega$, dok su reaktivna snaga i reaktansa drugog prijemnika, redom, $Q_2 = -2,5$ VAr i $X_2 = -2$ kΩ. Izračunati rezistanse prvog i drugog prijemnika. (*P960130*)

REŠENJE:
Efektivna vrednost struje prijemnika je

$$I = \sqrt{\frac{Q_2}{X_2}} = 25\sqrt{2}\ \text{mA} . \qquad (122.1)$$

pa rezistansa redne veze prijemnika iznosi

$$R_e = \frac{P_e}{I^2} = 4\ \text{k}\Omega . \qquad (122.2)$$

Polazeći od relacije

$$B_e = -\frac{X_e}{R_e^2 + X_e^2} , \qquad (122.3)$$

gde je X_e reaktansa redne veze, dobijamo kvadratnu jednačinu

$$(X_e - 4000)^2 = 0 \qquad (122.4)$$

(X_e u Ω), čije je rešenje $X_e = 4$ kΩ.

Reaktansa prvog prijemnika iznosi

$$X_1 = X_e - X_2 = 6\ \text{k}\Omega , \qquad (122.5)$$

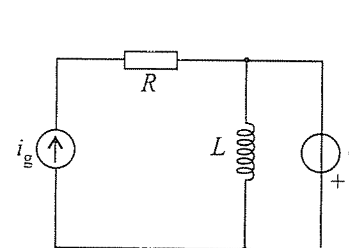
pa je njegova rezistansa

$$R_1 = \sqrt{Z_1^2 - X_1^2} = 3\ \text{k}\Omega . \qquad (122.6)$$

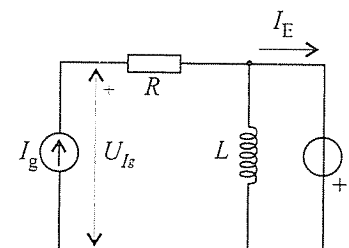
Konačno, za rezistansu drugog prijemnika dobijamo

$$R_2 = R_e - R_1 = 1\ \text{k}\Omega . \qquad (122.7)$$

123. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 123.1 poznato je $i_g(t) = 2\cos\omega t$ A, $e(t) = 4\sin\omega t$ V, $R = 1\ \Omega$ i $\omega L = 2\ \Omega$. Izračunati kompleksne prividne snage idealnih generatora. (*P930905*)



Slika 123.1.



Slika 123.2.

REŠENJE:
U kompleksnom domenu je $\underline{I}_g = \sqrt{2}$ A i $\underline{E} = -\mathrm{j}\,2\sqrt{2}$ V. Napon idealnog strujnog generatora je (slika 123.2)

$$\underline{U}_{I_g} = -\underline{E} + R\underline{I}_g = \sqrt{2}(1 + \mathrm{j}\,2)\ \text{V} , \qquad (123.1)$$

odakle za njegovu kompleksnu prividnu snagu dobijamo

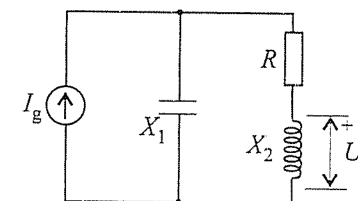
$$\underline{S}_{I_g} = \underline{U}_{I_g}\underline{I}_g^* = 2(1 + \mathrm{j}\,2)\ \text{VA} . \qquad (123.2)$$

Jačina struje idealnog naponskog generatora iznosi

$$\underline{I}_E = \underline{I}_g + \frac{\underline{E}}{\mathrm{j}\omega L} = 0 , \qquad (123.3)$$

pa je kompleksna prividna snaga ovog generatora jednaka nuli.

124. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 124.1 poznato je: $I_g = 2$ mA, $R = 200\ \Omega$ i $X_2 = 100\ \Omega$. Napon kalema je u fazi sa strujom generatora. Kolika je reaktansa X_1? (*P900622*)



Slika 124.1.

REŠENJE:
Označimo sa i_L jačinu struje kalema, pri čemu su referentni smerovi napona i struje kalema usaglašeni. Kako su napon kalema i struja strujnog generatora u fazi, to je

$$\psi_{I_L} - \psi_{I_g} = -\frac{\pi}{2} . \qquad (124.1)$$

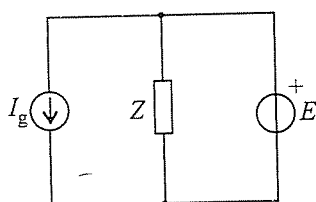
Imajući u vidu da je reaktansa X_1 negativna, jednačina strujnog razdelnika daje

$$\underline{I}_L = \frac{\mathrm{j}X_1}{R+\mathrm{j}(X_1+X_2)}\underline{I}_g = \frac{-\mathrm{j}\,|X_1|}{R+\mathrm{j}(X_1+X_2)}\underline{I}_g\,, \qquad (124.2)$$

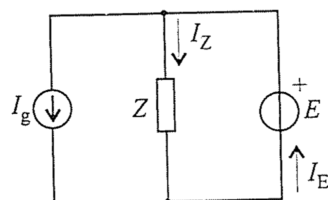
odakle sledi da će relacija (124.1) biti zadovoljena kada je

$$X_1 = -X_2 = -100\ \Omega\,. \qquad (124.3)$$

125. Jačina struje idealnog strujnog generatora u kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 125.1 je $i_g(t) = 1,2\sqrt{2}\cos(\omega t - \pi/3)$ A, a elektromotorna sila idealnog naponskog generatora kasni za strujom strujnog generatora za četvrtinu perioda. Faktor snage pretežno induktivnog prijemnika je $k = 0,8$, a prividna snaga prijemnika $S_Z = 1$ kVA, koliko iznosi i prividna snaga idealnog naponskog generatora ($S_E = 1$ kVA). Izračunati efektivnu vrednost elektromotorne sile generatora. (*P940829*)



Slika 125.1.



Slika 125.2.

REŠENJE:
Aktivna snaga prijemnika je

$$P_Z = kS_Z = 800\ \mathrm{W}\,, \qquad (125.1)$$

a reaktivna

$$Q_Z = \sqrt{1-k^2}\,S_Z = 600\ \mathrm{VAr} \qquad (125.2)$$

($Q_Z > 0$, jer je prijemnik pretežno induktivan).

Kako elektromotorna sila $e(t)$ kasni za strujom $i_g(t)$ za četvrtinu perioda, to je kompleksna prividna snaga koju razvija idealan strujni generator

$$\underline{S}_{I_g} = -\underline{E}\,\underline{I}_g^* = \mathrm{j}EI_g = \mathrm{j}Q_{I_g}\,, \qquad (125.3)$$

gde je $I_g = 1,2$ A.

Kompleksna prividna snaga koju razvija idealan naponski generator je, po teoremi održanja snage,

$$\underline{S}_E = -\underline{S}_{I_g} + \underline{S}_Z\,, \qquad (125.4)$$

odnosno

$$P_E + \mathrm{j}Q_E = -\mathrm{j}Q_{I_g} + P_Z + \mathrm{j}Q_Z\,. \qquad (125.5)$$

Odavde je $P_E = P_Z = 800$ W, pa je

$$Q_E = \pm\sqrt{S_E^2 - P_E^2} = \pm 600\ \mathrm{VAr}\,. \qquad (125.6)$$

Sada iz (125.5) sledi

$$Q_{I_g} = Q_Z - Q_E = \begin{cases} 0 & \text{za } Q_E = 600\ \mathrm{VAr} \\ 1200\ \mathrm{VAr} & \text{za } Q_E = -600\ \mathrm{VAr} \end{cases}. \qquad (125.7)$$

Konačno, za efektivnu vrednost elektoromotorne sile idealnog naponskog generatora dobijamo

$$E = \frac{Q_{I_g}}{I_g} = 1\ \mathrm{kV}\,, \qquad (125.8)$$

za $Q_{I_g} = 1200$ VAr. Rešenje $E = 0$, za $Q_{I_g} = 0$, otpada, jer je prema uslovu zadatka $S_E \neq 0$.

Zadatak ćemo rešiti i na drugi način, koristeći se fazorskim dijagramom za dato kolo. Usvojimo referentne smerove struja kao na slici 125.2. Prvi Kirhofov zakon daje

$$\underline{I}_E = \underline{I}_g + \underline{I}_Z\,. \qquad (125.9)$$

Sa fazorskog dijagrama prikazanog na slici 125.3 je

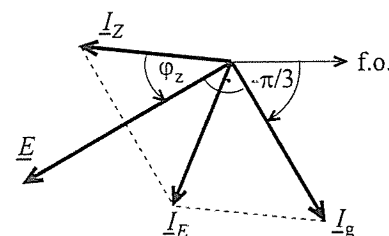
$$I_E^2 = I_g^2 + I_Z^2 + 2I_gI_Z\cos(\varphi_Z + \frac{\pi}{2}) = I_g^2 + I_Z^2 - 2I_gI_Z\sin\varphi_Z\,, \qquad (125.10)$$

gde je φ_Z argument kompleksne impedanse $\underline{Z}$. Kako iz $S_E = S_Z$ sledi $I_E = I_Z$, to je

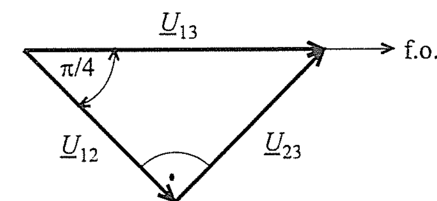
$$I_Z = \frac{I_g}{2\sin\varphi_Z} = \frac{I_g}{2\sqrt{1-k^2}} = 1\ \mathrm{A} \qquad (125.11)$$

($\sin\varphi_Z > 0$, zbog pretežno induktivnog karaktera prijemnika). Efektivna vrednost elektromotorne sile iznosi

$$E = \frac{S_Z}{I_Z} = 1\ \mathrm{kV}\,. \qquad (125.12)$$



Slika 125.3.

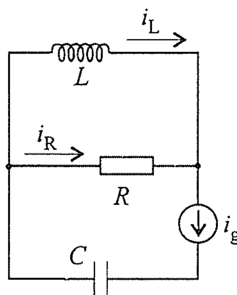


Slika 126.1.

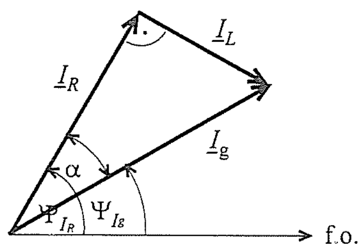
126. Nacrtati fazorski dijagram napona za kolo iz zadatka 114. (*P960401*)

REZULTAT:
Traženi dijagram je prikazan na slici 126.1.

127. U kolu prostoperiodične struje sa slike 127.1 poznato je: $R = 100\sqrt{3}\ \Omega$, $\omega L = 300\ \Omega$ i $i_R(t) = 20\sqrt{6}\cos(\omega t + \pi/3)$ mA. Nacrtati fazorski dijagram struja i odrediti početnu fazu struje i_g. (*P961004*)



Slika 127.1.



Slika 127.2.

REŠENJE:
Fazorski dijagram struja je prikazan na slici 127.2. Sa ovog dijagrama je

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{I_L}{I_R} = \frac{R}{\omega L} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \tag{127.1}$$

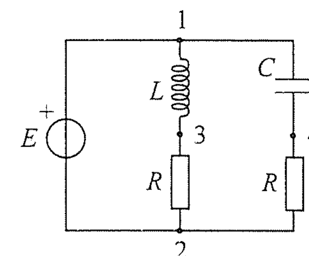
odakle je $\alpha = \pi/6$. Kako početna faza struje I_R iznosi $\psi_{I_R} = \pi/3$, to je početna faza struje idealnog strujnog generatora

$$\psi_{I_g} = \psi_{I_R} - \alpha = \frac{\pi}{6}. \tag{127.2}$$

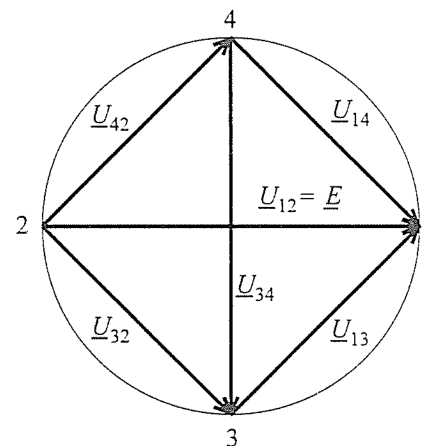
128. Za kolo prostoperiodične struje prikazano na slici 128.1 je $E = 100$ V i $R = Z_L = 200\ \Omega$. (a) Nacrtati fazorski dijagram napona. (b) Kolika treba da bude impedansa kondenzatora (Z_C) da bi efektivna vrednost napona u_{34} bila maksimalna? (c) Kolika je ta efektivna vrednost? (d) Kolika je pri tome fazna razlika napona u_{34} i u_{12}? (*P960613*)

REŠENJE:
(a) Fazorski dijagram napona je prikazan na slici 128.2.

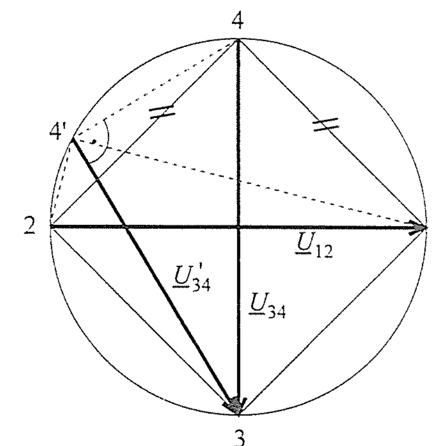
(b)-(c) Uočimo krug nad fazorom $\underline{E}$ kao prečnikom na slici 128.2. Tačke dodira fazora $\underline{U}_{13}$ i $\underline{U}_{32}$, odnosno $\underline{U}_{14}$ i $\underline{U}_{42}$ (tačke 3 i 4) leže na tome krugu, jer su trouglovi



Slika 128.1.



Slika 128.2.



Slika 128.3.

$\triangle 132$ i $\triangle 142$ pravougli. Kako je $R = Z_L$, to je trougao $\triangle 132$ jednakokraki. Dužina fazora $\underline{U}_{34}$ je maksimalna kada je trougao $\triangle 142$ takođe jednakokraki (videti sliku 128.3 – očigledno je $U'_{34} < U_{34}$). Odavde sledi $Z_C = R = 200\ \Omega$. Pri tome je $U_{34} = E = 100$ V.

(d) Fazna razlika napona u_{34} i u_{12} je $\Delta\theta = -\pi/2$.

129. Pretežno induktivan prijemnik, srednje snage $P = 48\pi$ kW i faktora snage $k = 0,6$, priključen je na prostoperiodičan napon, efektivne vrednosti $U = 1$ kV i učestanosti $f = 50$ Hz. Kolika treba da bude kapacitivnost kondenzatora priključenog paralelno ovom prijemniku da bi se faktor snage popravio na $k' = 0,8$? Koje biste od dva dobijena rešenja radije primenili i zašto? (*P960613*)

REŠENJE:
Pošto je prijemnik pretežno induktivan, njegov faktor reaktivnosti je pozitivan i iznosi

$$k_r = \sqrt{1 - k^2} = 0,8, \tag{129.1}$$

pa je reaktivna snaga prijemnika

$$Q = \frac{k_r P}{k} = 64\pi \text{ kVAr} . \tag{129.2}$$

Kada se priključi kondenzator, srednja i reaktivna snaga paralelne veze su, redom,

$$P' = P , \qquad Q' = Q + Q_C = Q - 2\pi f C U^2 , \tag{129.3}$$

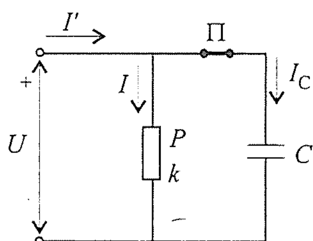
gde je Q_C reaktivna snaga kondenzatora. Kako je faktor reaktivnosti paralelne veze

$$k_r' = \pm\sqrt{1 - k'^2} = \pm 0,6 , \tag{129.4}$$

to imamo

$$Q' = \frac{k_r' P'}{k'} = \pm 36\pi \text{ kVAr} . \tag{129.5}$$

Sada iz (129.3) slede dva rešenja za kapacitivnost kondenzatora: $C_1 = 280\ \mu\text{F}$ (za $Q' = 36\pi$ kVAr) i $C_2 = 1$ mF (za $Q' = -36\pi$ kVAr). Prvo rešenje je bolje, jer zahteva kondenzator manje kapacitivnosti.



Slika 129.1.

Zadatak ćemo rešiti i na drugi način, koristeći se fazorskim računom. Prema slici 129.1, nakon priključenja kondenzatora imamo

$$\underline{I}' = \underline{I} + \underline{I}_C . \tag{129.6}$$

Argument kompleksne impedanse prijemnika je

$$\varphi = \arccos k = 53,13^\circ \tag{129.7}$$

($\varphi > 0$, jer je prijemnik pretežno induktivan), dok je za paralelnu vezu prijemnika i kondenzatora

$$\varphi' = \arccos k' = \pm 36,87^\circ . \tag{129.8}$$

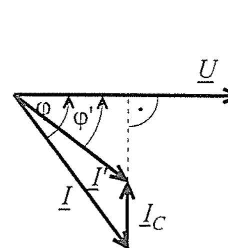
Na slici 129.2 je prikazan fazorski dijagram za kolo sa slike 129.1 koji odgovara pozitivnom uglu φ', dok fazorski dijagram sa slike 129.3 odgovara negativnom uglu φ'. Sa ovih dijagrama je

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{I\sin\varphi - I_C}{I\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi - \frac{I_C}{I\cos\varphi} . \tag{129.9}$$

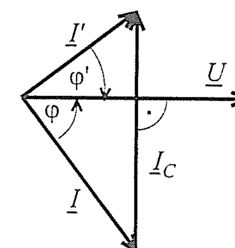
Kako je $I_C = 2\pi f C U$ i $P = UI\cos\varphi$, to je

$$\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}\varphi - \frac{2\pi f C U^2}{P} , \tag{129.10}$$

odakle sledi $C = 280\ \mu\text{F}$ (za $\varphi' = 36,87^\circ$) ili $C = 1$ mF (za $\varphi' = -36,87^\circ$).



Slika 129.2.



Slika 129.3.

130. Aktivna snaga pretežno induktivnog prijemnika je $P = 2,4$ kW, faktor snage $k = 0,6$, a efektivna vrednost struje $I = 20$ A. (a) Kolika je reaktansa kondenzatora koji treba priključiti paralelno prijemniku da bi se potpuno popravio faktor snage? (b) Kolika je pri tome efektivna vrednost struje napojnog voda? (*P940919*)

REZULTAT:

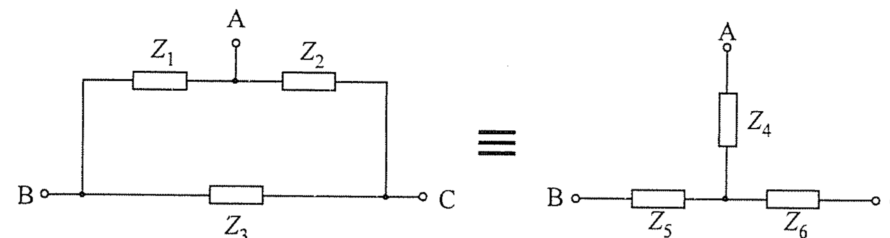
(a) Reaktansa kondenzatora kojim se faktor snage popravlja na $k' = 1$ je $X = -12,5\ \Omega$. (b) Time se efektivna vrednost jačine struje napojnog voda smanjuje na $I' = 12$ A.

131. Kompleksna impedansa prijemnika je $\underline{Z} = (1 + \mathrm{j})\ \Omega$, a kružna učestanost $\omega = 10^3\ \text{s}^{-1}$. Izračunati kapacitivnost kondenzatora vezanog paralelno prijemniku kojim se ostvaruje potpuna popravka faktora snage. (*P920920*)

REZULTAT:

Tražena kapacitivnost je $C = 500\ \mu\text{F}$.

132. Kompleksne impedanse trougla su $\underline{Z}_1 = 10(1 - \mathrm{j})\ \Omega$, $\underline{Z}_2 = \mathrm{j}\,20\ \Omega$ i $\underline{Z}_3 = -\mathrm{j}\,10\ \Omega$. Izračunati kompleksne impedanse ekvivalentne zvezde. (*P900928*)



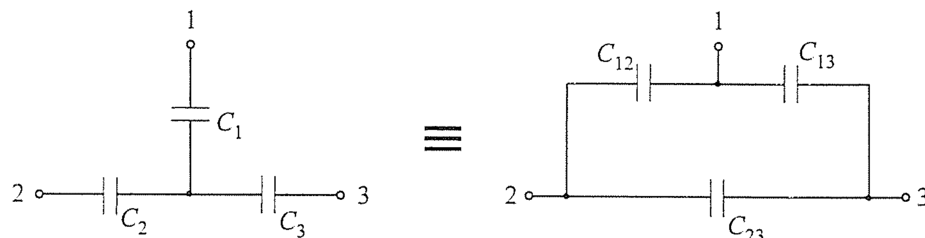
Slika 132.1.

REŠENJE:
Prema slici 132.1, kompleksne impedanse ekvivalentne zvezde su

$$\underline{Z}_4 = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} = 20(1+\mathrm{j})\ \Omega\,, \qquad \underline{Z}_5 = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} = -10(1+\mathrm{j})\ \Omega\,,$$

$$\underline{Z}_6 = \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} = 20\ \Omega\,. \tag{132.1}$$

133. (a) Polazeći od izraza u kompleksnom domenu za transfiguraciju zvezde u ekvivalentan trougao, izvesti izraze za transfiguraciju zvezde tri kondenzatora u ekvivalentan trougao. (b) Na osnovu izvedenih izraza izračunati kapacitivnosti trougla ekvivalentnog zvezdi kondenzatora kapacitivnosti $C_1 = C_2 = 10\ \mu\mathrm{F}$ i $C_3 = 20\ \mu\mathrm{F}$. *(P940616)*



Slika 133.1.

REŠENJE:
(a) Kompleksne impedanse kondenzatora koji čine zvezdu sa slike 133.1 su $\underline{Z}_i = -\mathrm{j}/(\omega C_i)$, $i = 1, 2, 3$. Kompleksne impedanse ekvivalentnog trougla na slici 133.1 su

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} = \frac{-\mathrm{j}\,(C_1+C_2+C_3)}{\omega C_1 C_2}\,,$$

$$\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1} = \frac{-\mathrm{j}\,(C_1+C_2+C_3)}{\omega C_2 C_3}\,,$$

$$\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} = \frac{-\mathrm{j}\,(C_1+C_2+C_3)}{\omega C_1 C_3}\,, \tag{133.1}$$

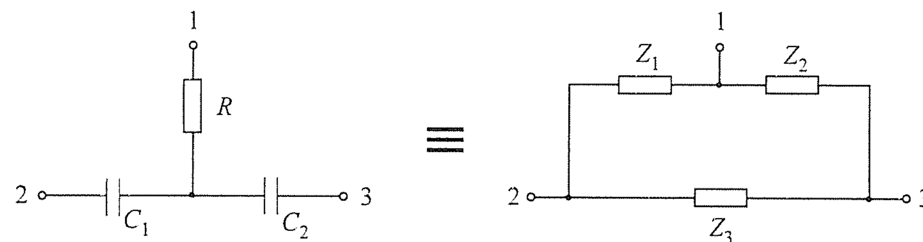
odakle je

$$C_{12} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2+C_3}\,, \qquad C_{23} = \frac{C_2C_3}{C_1+C_2+C_3}\,, \qquad C_{13} = \frac{C_1C_3}{C_1+C_2+C_3}\,. \tag{133.2}$$

(b) Za zadate brojne podatke, kapacitivnosti ekvivalentnog trougla iznose $C_{12} = 2{,}5\ \mu\mathrm{F}$ i $C_{23} = C_{13} = 5\ \mu\mathrm{F}$.

Čitaocu se preporučuje da izvede odgovarajuće izraze za transfiguraciju trougla kondenzatora u zvezdu kondenzatora, zvezde kalemova u trougao kalemova i trougla kalemova u zvezdu kalemova.

134. Izračunati kompleksne impedanse trougla ekvivalentnog zvezdi koju čine otpornik otpornosti $R = 1\ \mathrm{k}\Omega$ i dva kondenzatora kapacitivnosti $C_1 = C_2 = 10\ \mu\mathrm{F}$, pri kružnoj učestanosti $\omega = 100\ \mathrm{s}^{-1}$. *(P960701)*



Slika 134.1.

REZULTAT:
Kompleksne impedanse ekvivalentnog trougla (slika 134.1) su $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = (2-\mathrm{j})\ \mathrm{k}\Omega$ i $\underline{Z}_3 = -(1+\mathrm{j}\,2)\ \mathrm{k}\Omega$.

135. Maksvelov most za merenje parametara kalemova, prikazan na slici 135.1, priključen je na izvor prostoperiodičnog napona efektivne vrednosti U i učestanosti f. Ulazna kompleksna impedansa galvanometra je $\underline{Z}_G = R$. Kada je most u ravnoteži, poznato je R_1, R_2, R_3 i C. Koliki su parametri kalema, L_x i R_x? *(P950924)*

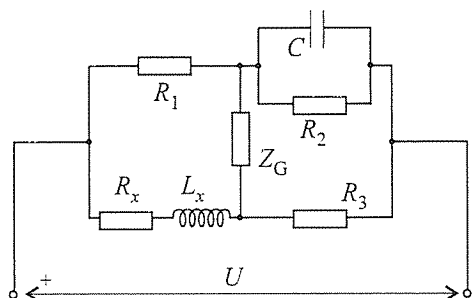
REŠENJE:
Iz uslova ravnoteže mosta je

$$R_x + \mathrm{j}\omega L_x = R_1R_3\left(\frac{1}{R_2} + \mathrm{j}\omega C\right) = \frac{R_1R_3}{R_2} + \mathrm{j}\omega C R_1 R_3\,, \tag{135.1}$$

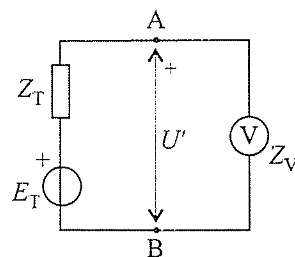
gde je $\omega = 2\pi f$, odakle sledi $L_x = CR_1R_3$ i $R_x = R_1R_3/R_2$.

136. Napon između tačaka A i B jednog kola prostoperiodične struje meri se voltmetrom čija je ulazna impedansa čisto kapacitivna i iznosi $\underline{Z}_V = -\mathrm{j}\,10\ \mathrm{k}\Omega$. Voltmetar pokazuje efektivnu vrednost napona $U' = 20\ \mathrm{kV}$. Kolika je efektivna vrednost napona U između tačaka A i B kada se voltmetar ukloni, ako je ekvivalentna impedansa kola između tih tačaka $\underline{Z} = \mathrm{j}\,5\ \mathrm{k}\Omega$? *(P930905)*

REŠENJE:
U odnosu na priključke voltmetra kolo se može zameniti Tevenenovim generatorom, elektromotorne sile $\underline{E}_T$ i unutrašnje impedanse $\underline{Z}_T = \underline{Z} = \mathrm{j}\,5\ \mathrm{k}\Omega$ (slika 136.1).



Slika 135.1.



Slika 136.1.

Kompleksni napon čiji moduo pokazuje voltmetar je

$$\underline{U}' = \frac{\underline{Z}_V}{\underline{Z}_V + \underline{Z}_T}\underline{E}_T = 2\underline{E}_T \,, \tag{136.1}$$

pa efektivna vrednost napona između tačaka A i B kada se voltmetar ukloni iznosi

$$U = E_T = \frac{U'}{2} = 10\ \text{kV} \,. \tag{136.2}$$

Vidimo da voltmetar pokazuje dvostruko veću efektivnu vrednost napona od stvarne. Koliki napon između tačaka A i B bi pokazao voltmetar ulazne impedanse $\underline{Z}'_V = -\mathrm{j}\,5\ \mathrm{k}\Omega$?

137. Generator elektromotorne sile $e(t) = 20\cos\omega t$ V, gde je $\omega = 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$, i unutrašnje impedanse $\underline{Z}_g = (5 - \mathrm{j}\,20)\ \Omega$, priključen je na prijemnik. Kolika treba da bude impedansa prijemnika ($\underline{Z}_p$) da bi srednja snaga prijemnika bila maksimalna i kolika je ta snaga? (*P910413*)

REŠENJE:
Po teoremi o prilagođenju prijemnika po snazi, srednja snaga prijemnika ima maksimum kada njegova kompleksna impedansa iznosi

$$\underline{Z}_p = \underline{Z}_g^* = (5 + \mathrm{j}\,20)\ \Omega \,. \tag{137.1}$$

Maksimalna srednja snaga prijemnika je

$$(P_p)_{\max} = \frac{E^2}{4R_g} = 10\ \mathrm{W} \,, \tag{137.2}$$

gde je $E = 10\sqrt{2}$ V efektivna vrednost elektromotorne sile generatora i $R_g = \mathrm{Re}\{\underline{Z}_g\} = 5\ \Omega$.

138. Efektivna vrednost elektromotorne sile naponskog generatora je $E = 3$ V, kružna učestanost $\omega = 10^4\ \mathrm{s}^{-1}$, a unutrašnja impedansa se može predstaviti rednom vezom otpornika otpornosti $R_g = 4\ \Omega$ i kalema induktivnosti $L_g = 300\ \mu\mathrm{H}$. Na generator je priključen čisto rezistivan prijemnik. (a) Kolika treba da bude otpornost prijemnika (R_p) da bi srednja snaga prijemnika bila maksimalna? (b) Kolika je ta maksimalna snaga? (*P940829*)

REŠENJE:
(a) Unutrašnja kompleksna impedansa generatora je

$$\underline{Z}_g = R_g + \mathrm{j}X_g = R_g + \mathrm{j}\omega L_g = (4 + \mathrm{j}\,3)\ \Omega \,. \tag{138.1}$$

Srednja snaga prijemnika je

$$P_p = R_p I_p^2 = \frac{R_p E^2}{|R_p + \underline{Z}_g|^2} = \frac{R_p E^2}{(R_p + R_g)^2 + X_g^2} \,, \tag{138.2}$$

gde je I_p efektivna vrednost struje prijemnika. Otpornost prijemnika pri kojoj je njegova srednja snaga maksimalna dobijamo iz uslova

$$\frac{\mathrm{d}P_p}{\mathrm{d}R_p} = 0 \,, \tag{138.3}$$

odnosno

$$(R_p + R_g)^2 + X_g^2 - 2R_p(R_p + R_g) = 0 \,. \tag{138.4}$$

Rešenje ove jednačine je

$$R_p = |\underline{Z}_g| = 5\ \Omega \tag{138.5}$$

(uslov prilagođenja po snazi čisto rezistivnog prijemnika).

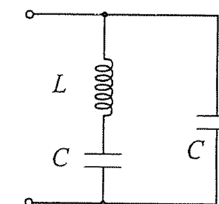
(b) Maksimum srednje snage prijemnika iznosi $(P_p)_{\max} = 0{,}5$ W.

139. Na kojim je kružnim učestanostima (a) impedansa i (b) admitansa mreže prikazane na slici 139.1 jednaka nuli? (*P910413*)

REŠENJE:
(a) Ulazna kompleksna impedansa date mreže je

$$\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \parallel \left(\mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right) = \mathrm{j}\,\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C(2 - \omega^2 LC)} = \mathrm{j}X \,, \tag{139.1}$$

gde je X reaktansa mreže. Kružne učestanosti na kojima je impedansa mreže jednaka nuli (takozvane rezonantne kružne učestanosti mreže) iznose $\omega_{r1} = 1/\sqrt{LC}$ i $\omega_{r2} = \infty$.



Slika 139.1.

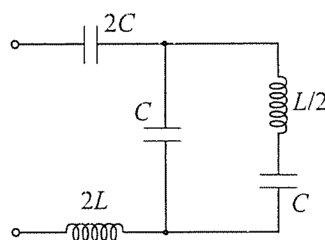
(b) Kompleksna admitansa mreže je $\underline{Y} = -\mathrm{j}/X$ i jednaka je nuli kada $X \to \infty$, a to se događa na kružnim učestanostima $\omega_{a1} = 0$ i $\omega_{a2} = 2/\sqrt{LC}$, koje predstavljaju antirezonantne kružne učestanosti mreže.

Čitaocu se preporučuje da skicira zavisnost X od ω $(0 \leq \omega < \infty)$.

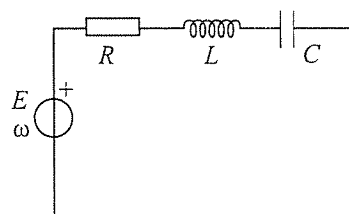
140. Odrediti sve kružne učestanosti pri kojima je ulazna admitansa mreže prikazane na slici 140.1 jednaka nuli. (*P940829*)

REZULTAT:
Ekvivalentna admitansa mreže je jednaka nuli na sledećim (antirezonantnim) kružnim učestanostima: $\omega_{a1} = 0$, $\omega_{a2} = 2/\sqrt{LC}$ i $\omega_{a3} = \infty$.

Preporučuje se čitaocu da odredi rezonantne kružne učestanosti mreže, te da skicira funkciju $X(\omega)$.



Slika 140.1.



Slika 141.1.

141. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 141.1 poznato je je $E = 10$ mV, $\omega = 10^7\ \mathrm{s}^{-1}$, $R = 100\ \Omega$ i $C = 100$ pF. Kolika treba da bude induktivnost L da bi snaga otpornika bila maksimalna? (*P921025*)

REŠENJE:
Snaga otpornika, $P_R = RI^2$, je maksimalna kada je efektivna vrednost struje u kolu, I, maksimalna, a to se događa pri faznoj rezonanciji u kolu. Tada je kružna učestanost generatora, ω, jednaka rezonantnoj učestanosti kola, koja iznosi

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} . \tag{141.1}$$

Odavde je

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = 100\ \mu\mathrm{F} . \tag{141.2}$$

142. Redno RLC kolo, parametara $R = 1\ \Omega$, $L = 1\ \mu$H i $C = 1\ \mu$F, priključeno je na idealan naponski generator efektivne vrednosti elektromotorne sile $E = 0,1$ V, čija se kružna učestanost, ω, može menjati. Pri kojoj je kružnoj učestanosti efektivna vrednost napona kalema maksimalna? (*P930926*)

REŠENJE:
Efektivna vrednost napona kalema je

$$U_L = \frac{\omega L E}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}} . \tag{142.1}$$

Kružnu učestanost generatora pri kojoj je ova efektivna vrednost maksimalna dobijamo iz uslova

$$\frac{\mathrm{d}(U_L^2)}{\mathrm{d}\omega} = 0 , \tag{142.2}$$

koji se svodi na sledeći oblik

$$R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = (\omega L)^2 - \frac{1}{(\omega C)^2} . \tag{142.3}$$

Odavde je

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2C^2}} = \sqrt{2} \cdot 10^6\ \mathrm{s}^{-1} . \tag{142.4}$$

143. Za redno RLC kolo iz prethodnoga zadatka, odrediti kružnu učestanost generatora pri kojoj efektivna vrednost napona kondenzatora ima maksimum. (*P930624*)

REŠENJE:
Efektivna vrednost napona kondenzatora je

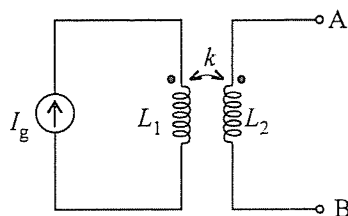
$$U_C = \frac{E}{\omega C\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}} . \tag{143.1}$$

Traženu kružnu učestanost najlakše dobijamo izjednačavajući sa nulom izvod po ω izraza za $1/U_C^2$, što daje

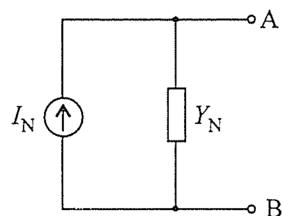
$$R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = \frac{1}{(\omega C)^2} - (\omega L)^2 , \tag{143.2}$$

odnosno

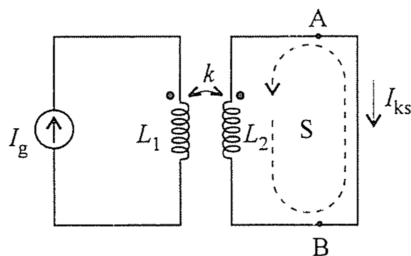
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10^6\ \mathrm{s}^{-1} . \tag{143.3}$$



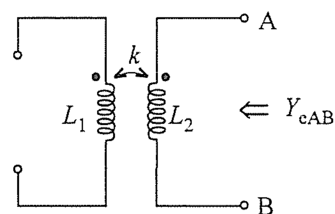
Slika 144.1.



Slika 144.2.



Slika 144.3.



Slika 144.4.

144. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 144.1 je $\underline{I}_g = (1-\mathrm{j})$ A, $\omega = 1000\ \mathrm{s}^{-1}$, $L_1 = 10$ mH, $L_2 = 40$ mH i $k = 1$. Izračunati parametre Nortonovog generatora za priključke A i B. Skicirati taj generator. *(P960925)*

REŠENJE:
Jačina struje ekvivalentnog Nortonovog generatora, skiciranog na slici 144.2, jednaka je jačini struje kratkog spoja između tačaka A i B, $\underline{I}_{ks}$ (slika 144.3). Drugi Kirhofov zakon za zatvoreni put S sa slike 144.3 daje

$$\mathrm{j}\omega L_2 \underline{I}_{ks} + \mathrm{j}\omega L_{12}\underline{I}_g = 0\,, \tag{144.1}$$

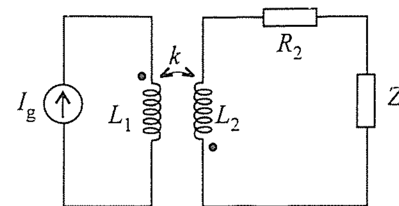
pri čemu međusobna induktivnost kalemova iznosi $L_{12} = -k\sqrt{L_1 L_2} = -20$ mH. Odavde je

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{ks} = -\frac{L_{12}}{L_2}\underline{I}_g = 0,5(1-\mathrm{j})\ \mathrm{A}\,. \tag{144.2}$$

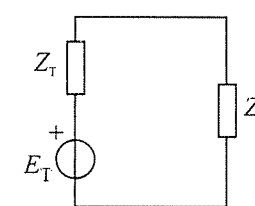
Unutrašnja admitansa Nortonovog generatora je (slika 144.4)

$$\underline{Y}_N = \underline{Y}_{eAB} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega L_2} = -\mathrm{j}\,25\ \mathrm{mS}\,. \tag{144.3}$$

145. U kolu prostoperiodične struje sa slike 145.1 poznato je $\underline{I}_g = 4$ mA, $R_2 = 20\ \Omega$, $L_2 = 30$ mH, $|L_{12}| = 9$ mH i $\omega = 2000\ \mathrm{s}^{-1}$. Kolika treba da bude kompleksna impedansa prijemnika ($\underline{Z}_p$) da bi aktivna snaga koju prima taj prijemnik bila maksimalna? Kolika je ta maksimalna snaga? *(P960401)*



Slika 145.1.



Slika 145.2.

REŠENJE:
U odnosu na prijemnik, ostatak kola možemo zameniti Tevenenovim generatorom, kao na slici 145.2. Elektromotorna sila ovog generatora jednaka je naponu praznog hoda dela kola levo od prijemnika, pa je

$$\underline{E}_T = -\mathrm{j}\omega|L_{12}|\underline{I}_g = -\mathrm{j}\,72\ \mathrm{mV}\,. \tag{145.1}$$

Unutrašnja impedansa generatora je

$$\underline{Z}_T = R_2 + \mathrm{j}\omega L_2 = (20+\mathrm{j}\,60)\ \Omega\,. \tag{145.2}$$

Po teoremi o prilagođenju prijemnika po snazi, aktivna snaga prijemnika je maksimalna kada je

$$\underline{Z}_p = \underline{Z}_T^* = (20-\mathrm{j}\,60)\ \Omega\,. \tag{145.3}$$

Ta snaga iznosi

$$(P_p)_{max} = \frac{|\underline{E}_T|^2}{4R_T} = 64,8\ \mu\mathrm{W}\,, \tag{145.4}$$

gde je $R_T = \mathrm{Re}\{\underline{Z}_T\} = 20\ \Omega$.

146. Izračunati aktivnu snagu prijemnika u kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 146.1 ako je $E = 10$ V, $\omega L = 1\ \Omega$, $k = 1$ i $\underline{Z}_p = (1-\mathrm{j})\ \Omega$. *(P950614)*

REŠENJE:
Posmatrajući date spregnute kalemove kao mrežu sa dva pristupa, veze između napona i struja na pristupima mreže preko z-parametara glase (slika 146.2)

$$\underline{U}_1 = \underline{z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{z}_{12}\underline{I}_2\,, \tag{146.1}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{z}_{22}\underline{I}_2\,, \tag{146.2}$$

gde je $\underline{z}_{11} = \mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}\ \Omega = \underline{z}_{22}$, $\underline{z}_{12} = \underline{z}_{21} = -\mathrm{j}\omega k L = -\mathrm{j}\ \Omega$, $\underline{U}_1 = \underline{E}$ i $\underline{U}_2 = -\underline{Z}_p\underline{I}_2$. Odavde je

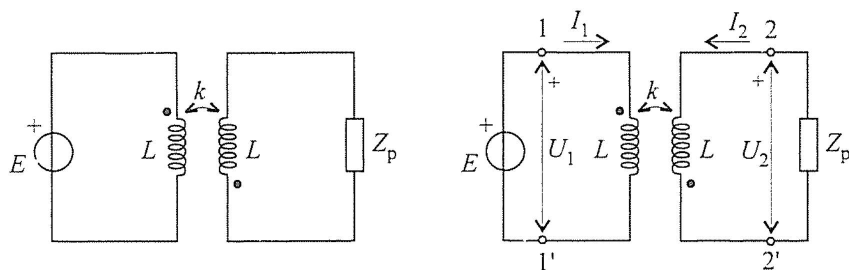
$$\underline{I}_2 = \frac{1+\mathrm{j}}{2}\underline{E}\,, \tag{146.3}$$

pa efektivna vrednost struje prijemnika iznosi

$$I_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} E = 5\sqrt{2}\ \mathrm{A} . \qquad (146.4)$$

Aktivna snaga prijemnika je

$$P_\mathrm{p} = \mathrm{Re}\{\underline{Z}_\mathrm{p}\}\, I_2^2 = 50\ \mathrm{W} . \qquad (146.5)$$



Slika 146.1. Slika 146.2.

Kako, po teoremi održanja snage u kolu, tražena aktivna snaga koju prima prijemnik mora biti jednaka aktivnoj snazi koju razvija generator, to zadatak možemo rešiti i računanjem ove druge snage. Ekvivalentna impedansa koju "vidi" generator je

$$\underline{Z}_\mathrm{e} = \frac{\underline{z}_{11}\underline{z}_{22} - \underline{z}_{12}^2 + \underline{z}_{11}\underline{Z}_\mathrm{p}}{\underline{z}_{22} + \underline{Z}_\mathrm{p}} = \frac{\underline{z}_{11}\underline{Z}_\mathrm{p}}{\underline{z}_{22} + \underline{Z}_\mathrm{p}} = (1 + \mathrm{j})\ \Omega \qquad (146.6)$$

($\underline{z}_{11}\underline{z}_{22} - \underline{z}_{12}^2 = 0$, jer je $k = 1$). Stoga imamo

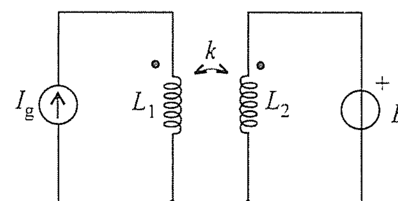
$$P_\mathrm{p} = P_E = \mathrm{Re}\{\underline{Z}_\mathrm{e}\}\, \frac{E^2}{|\underline{Z}_\mathrm{e}|^2} = 50\ \mathrm{W} . \qquad (146.7)$$

Konačno, uočavajući da se radi o savršenom transformatoru ($k = 1$) i koristeći se sledećom vezom napona sekundara i primara takvoga transformatora

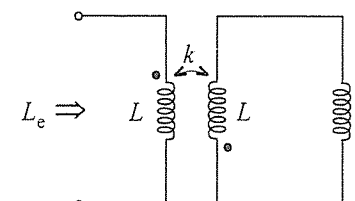
$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{L_{12}}{L_1} , \qquad (146.8)$$

dobijamo $U_2 = E = 10$ V, $I_2 = U_2/|\underline{Z}_\mathrm{p}| = 5\sqrt{2}$ A i snagu P_p iz relacije (146.5), što predstavlja rešenje zadatka na treći način.

Čitaocu se preporučuje da, kao vežbu, dokaže relaciju (146.8) primenom Tevenenove teoreme.



Slika 147.1.



Slika 148.1.

147. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 147.1 poznato je: $\underline{I}_\mathrm{g} = 0,2$ A, $Z_{L_1} = 20\ \Omega$, $Z_{L_2} = 50\ \Omega$, $Z_{L_{12}} = 10\ \Omega$ i $\underline{E} = \mathrm{j}\,10$ V. Izračunati efektivnu vrednost napona idealnog strujnog generatora. (*P910927*)

REZULTAT:
Tražena efektivna vrednost je 5,6 V.

148. Izračunati ekvivalentnu induktivnost mreže kalemova prikazane na slici 148.1 ako je $L = 1$ mH i $k = 1$. (*P910628*)

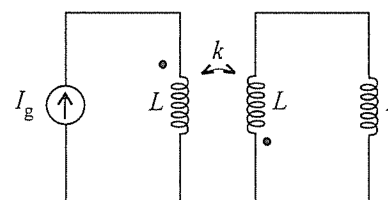
REŠENJE:
Pošto je transformator savršen ($k = 1$), ekvivalentna ulazna impedansa mreže je [videti (146.6)]

$$\underline{Z}_\mathrm{e} = \frac{\mathrm{j}\omega L \underline{Z}_\mathrm{p}}{\mathrm{j}\omega L + \underline{Z}_\mathrm{p}} = \mathrm{j}\omega \frac{L}{2} , \qquad (148.1)$$

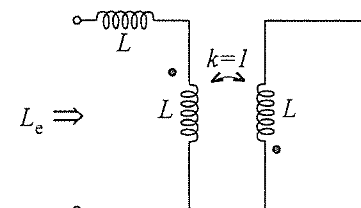
gde je $\underline{Z}_\mathrm{p} = \mathrm{j}\omega L$, pa ekvivalentna induktivnost mreže iznosi $L_\mathrm{e} = L/2 = 0,5$ mH.

149. Za kolo prostoperiodične struje prikazano na slici 149.1 poznato je $I_\mathrm{g} = 0,2$ A, $Z_L = 20\ \Omega$ i $k = 1$. Izračunati kompleksnu prividnu snagu koju razvija strujni generator. (*P940130*)

REZULTAT:
Tražena snaga je $\underline{S}_{I_\mathrm{g}} = \mathrm{j}\,0,4$ VA.



Slika 149.1.

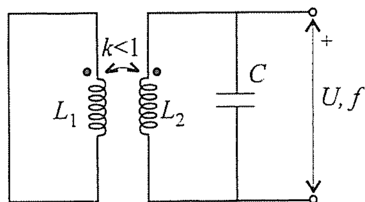


Slika 150.1.

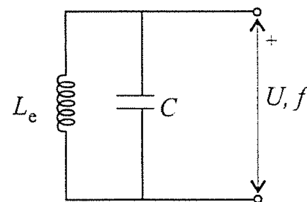
150. Izračunati ekvivalentnu induktivnost mreže kalemova sa slike 150.1. (*P920205*)

REZULTAT:
Ekvivalentna induktivnost je $L_e = L$.

151. Izračunati kružnu učestanost antirezonancije u kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 151.1 smatrajući poznatim L_1, L_2, k i C. (*P960130*)



Slika 151.1.



Slika 151.2.

REŠENJE:
Uvodeći parametre $z_{11} = j\omega L_1$, $z_{22} = j\omega L_2$ i $z_{12} = \pm j\omega k\sqrt{L_1 L_2}$, ekvivalentna impedansa koju, u datome kolu, "vidi" kondenzator prema spregnutim kalemovima je

$$\underline{Z}_e = \frac{z_{22}z_{11} - z_{12}^2}{z_{11}} = j\omega L_2(1-k^2) \,. \tag{151.1}$$

Odavde sledi da se kolo sa slike 151.1 može predstaviti ekvivalentnim kolom prikazanim na slici 151.2, gde je $L_e = (1-k^2)L_2$, pa je tražena antirezonantna kružna učestanost

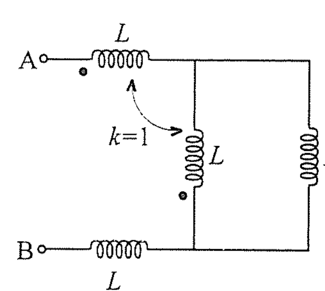
$$\omega_a = \frac{1}{\sqrt{L_2 C(1-k^2)}} \,. \tag{151.2}$$

152. Izračunati ekvivalentnu induktivnost mreže kalemova prikazane na slici 152.1. (*P950904*)

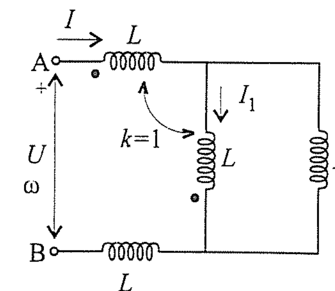
REŠENJE:
Pretpostavimo da je data mreža priključena na izvor prostoperiodičnog napona, efektivne vrednosti U i kružne učestanosti ω, kao na slici 152.2, i da je u mreži nastupio prostoperiodični režim. Kako je $L_{12} = -L$, to imamo

$$\underline{U} = j\omega L\underline{I} + j\omega L\underline{I}_1 + j\omega L_{12}\underline{I} + j\omega L\underline{I} + j\omega L_{12}\underline{I}_1 = j\omega L\underline{I} \,, \tag{152.1}$$

odakle je ekvivalentna induktivnost mreže $L_e = L$.

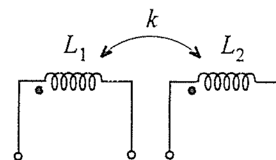


Slika 152.1.

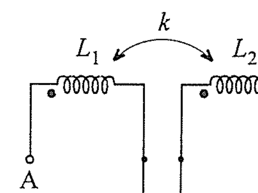


Slika 152.2.

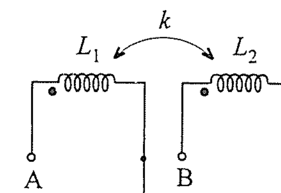
153. Dva kalema induktivnosti $L_1 = 4$ mH i $L_2 = 1$ mH i koeficijenta sprege $k = 1$, prikazana na slici 153.1, treba vezati na red tako da ekvivalentna induktivnost bude (a) maksimalna, i (b) minimalna. Skicirati te dve veze i izračunati kolika je ekvivalentna induktivnost u oba slučaja. (*P900914*)



Slika 153.1.



Slika 153.2.



Slika 153.3.

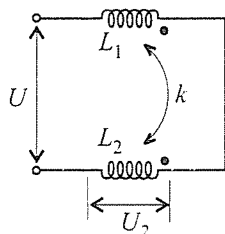
REZULTAT:
Ekvivalentna induktivnost redne veze prikazane na slici 153.2 je maksimalna i iznosi $(L_e)_{max} = 9$ mH, dok se minimalna ekvivalentna induktivnost, $(L_e)_{min} = 1$ mH, ostvaruje vezom sa slike 153.3.

154. Efektivna vrednost napona na koji je priključena redna veza spregnutih kalemova na slici 154.1 je $U = 10$ V, a kružna učestanost $\omega = 10^4\ s^{-1}$. Pri toj učestanosti reaktanse kalemova su $X_1 = 100\ \Omega$ i $X_2 = 64\ \Omega$. Koeficijent sprege je $k = 1$. Kolika je efektivna vrednost napona U_2? (*P900622*)

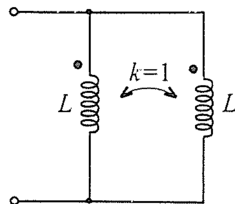
REZULTAT:
Efektivna vrednost napona drugog kalema je $U_2 = 40$ V.

155. Izračunati ekvivalentnu induktivnost paralelne veze dva spregnuta kalema prikazana na slici 155.1. (*P921025*)

REZULTAT:
Tražena induktivnost je $L_e = L$.

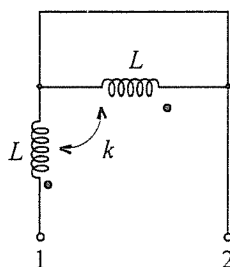


Slika 154.1.

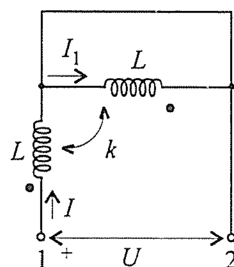


Slika 155.1.

156. Odrediti ekvivalentnu induktivnost između tačaka 1 i 2 za mrežu prikazanu na slici 156.1 ako je $L = 4$ mH i $k = 0,5$. (*P950123*)



Slika 156.1.



Slika 156.2.

REŠENJE:
Prema slici 156.2 imamo

$$\underline{U} = \mathrm{j}\omega L\underline{I} - \mathrm{j}\omega kL\underline{I}_1 \,, \tag{156.1}$$

$$\mathrm{j}\omega L\underline{I}_1 - \mathrm{j}\omega kL\underline{I} = 0 \,, \tag{156.2}$$

odakle je

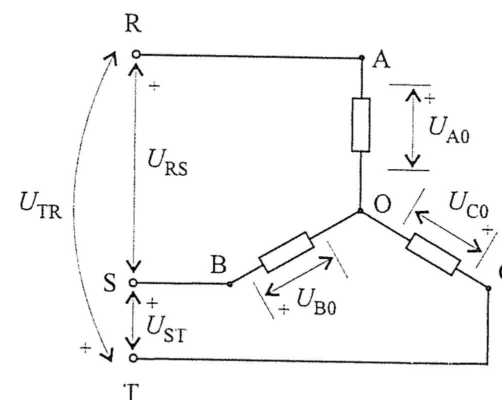
$$\underline{U} = \mathrm{j}\omega L(1-k^2)\underline{I} = \mathrm{j}\omega L_\mathrm{e}\underline{I} \,. \tag{156.3}$$

Zaključujemo da ekvivalentna induktivnost date mreže iznosi $L_\mathrm{e} = (1-k^2)L = 3$ mH.

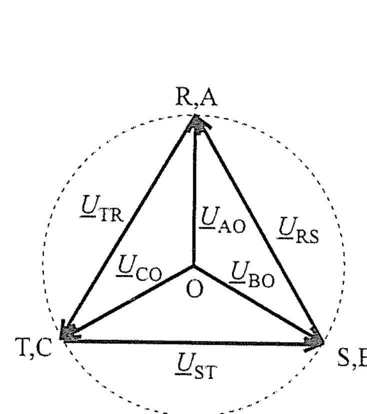
157. Simetričan trofazni prijemnik, vezan u zvezdu, priključen je na direktan simetričan trofazni sistem linijskih napona. (a) Nacrtati šemu i na njoj označiti referentne smerove linijskih napona i napona faza prijemnika. (b) Skicirati fazorski dijagram tih napona. (c) Koliki je odnos efektivnih vrednosti linijskih i faznih napona?

REŠENJE:
(a) Na slici 157.1 je prikazana tražena šema.

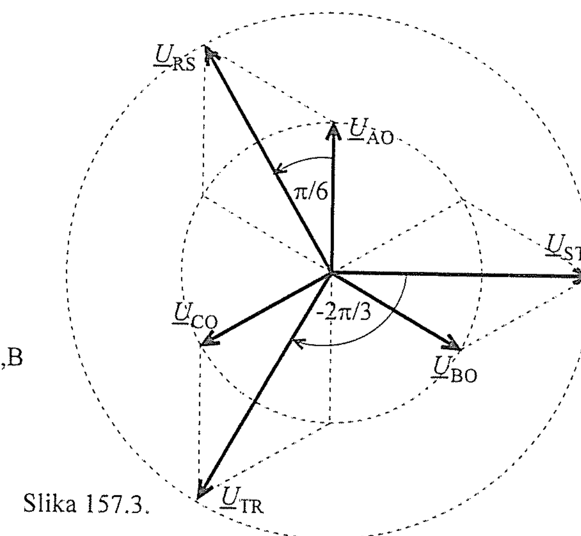
(b) Fazorski dijagram linijskih napona i faznih napona prijemnika je skiciran na slici 157.2. Dijagram se može nacrtati i kao na slici 157.3.



Slika 157.1.



Slika 157.2.



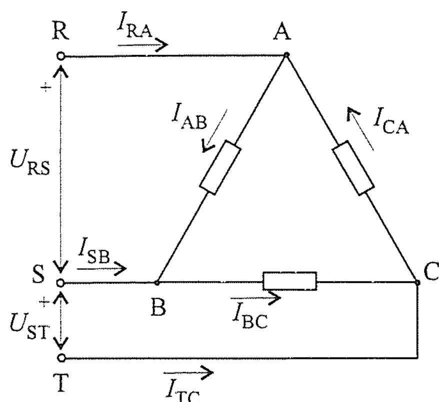
Slika 157.3.

(c) Odnos efektivnih vrednosti linijskih i faznih napona je

$$\frac{U_\mathrm{l}}{U_\mathrm{f}} = \sqrt{3} \,, \tag{157.1}$$

gde je $U_\mathrm{l} = U_\mathrm{RS} = U_\mathrm{ST} = U_\mathrm{TR}$ i $U_\mathrm{f} = U_\mathrm{AO} = U_\mathrm{BO} = U_\mathrm{CO}$. Sistem linijskih napona fazno prednjači sistemu faznih napona prijemnika za $\pi/6$.

158. Simetričan trofazni prijemnik, vezan u trougao, priključen je na vod čiji naponi čine direktan simetričan sistem. (a) Nacrtati šemu i na njoj označiti referentne smerove linijskih struja i struja faza prijemnika. (b) Skicirati fazorski dijagram tih struja. (c) Koliki je odnos efektivnih vrednosti linijskih i faznih struja? (*P960904*)



Slika 158.1.

REŠENJE:
(a)-(b) Šema prijemnika vezanog u trougao je prikazana na slici 158.1, dok su fazori struja nacrtani na slikama 158.2 i 158.3.

(c) Odnos efektivnih vrednosti linijskih struja i faznih struja prijemnika je

$$\frac{I_l}{I_f} = \sqrt{3}\,, \tag{158.1}$$

gde je $I_l = I_{RA} = I_{SB} = I_{TC}$ i $I_f = I_{AB} = I_{BC} = I_{CA}$. Sistem linijskih struja fazno kasni za sistemom faznih struja za $\pi/6$.

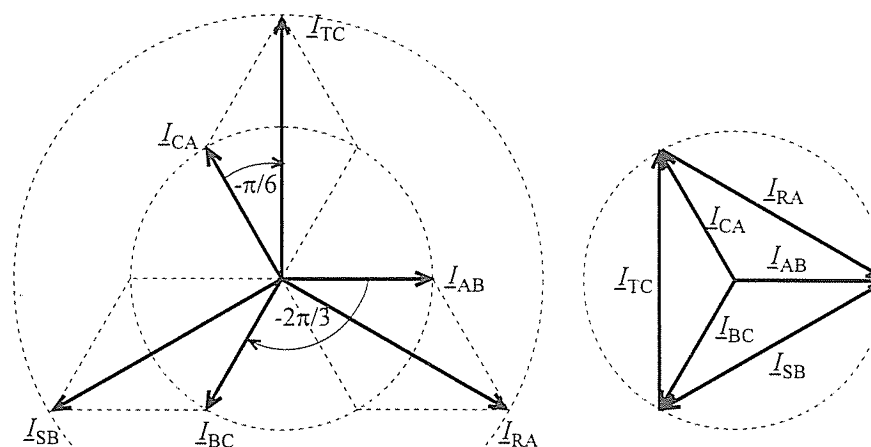
159. Koliki je zbir trenutnih elektromotornih sila trofaznog simetričnog generatora vezanog u (a) zvezdu i (b) trougao? (*P890527*)

REŠENJE:
Kako je zbir kompleksnih predstavnika (ili fazora) elektromotornih sila trofaznog simetričnog generatora jednak nuli, to je i zbir trenutnih elektromotornih sila jednak nuli, bez obzira da li je generator vezan u zvezdu ili trougao.

160. Simetričan trofazni pretežno kapacitivan prijemnik, impedanse grane $Z = 300\ \Omega$ i faktora snage $k = 0,8$, priključen je na simetričan trofazni generator kao što je prikazano na slici 160.1. Efektivna vrednost elektromotorne sile generatora je $E = 10$ kV. Kolike su aktivna i reaktivna snaga prijemnika? (*P970621*)

REŠENJE:
Kako je prijemnik vezan u trougao, a generator u zvezdu, to je efektivna vrednost faznog napona prijemnika

$$U_f = U_l = \sqrt{3}E = 10\sqrt{3}\ \text{kV}\,, \tag{160.1}$$



Slika 158.2.

Slika 158.3.

gde je U_l efektivna vrednost linijskog napona. Prividna snaga prijemnika je

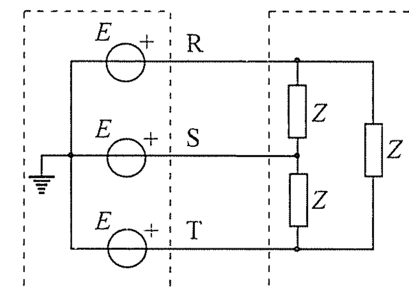
$$S = 3\frac{U_f^2}{Z} = 3\ \text{MVA}\,, \tag{160.2}$$

pa aktivna i reaktivna snaga prijemnika iznose, redom,

$$P = kS = 2,4\ \text{MW} \quad \text{i}$$

$$Q = -\sqrt{1-k^2}\,S = -1,8\ \text{MVAr} \tag{160.3}$$

($Q < 0$, zbog pretežno kapacitivnog karaktera prijemnika).



Slika 160.1.

Preporučuje se čitaocu da izračuna priraštaje aktivne i reaktivne snage prijemnika kada se on preveže u zvezdu.

161. Simetričan trofazni generator vezan je u zvezdu. Efektivna vrednost elektromotorne sile je $E = 1$ kV, a kružna učestanost $\omega = 10^3\ \text{s}^{-1}$. Na generator je priključen simetričan trofazni prijemnik vezan u trougao. Svaku fazu prijemnika čini redna veza otpornika otpornosti $R = 1\ \Omega$ i kalema induktivnosti $L = 1$ mH. Izračunati (a) efektivnu vrednost fazne struje generatora i (b) kompleksnu prividnu snagu prijemnika. (*P950123*)

REŠENJE:
(a) Kompleksna impedansa grane prijemnika je

$$\underline{Z} = R + j\omega L = (1 + j)\ \Omega\,. \tag{161.1}$$

pa efektivna vrednost fazne struje prijemnika iznosi

$$I_f = \frac{\sqrt{3}E}{|\underline{Z}|} = 500\sqrt{6}\ \mathrm{A}\,. \tag{161.2}$$

Odavde je efektivna vrednost fazne struje generatora

$$I_E = \sqrt{3}I_f = 1500\sqrt{2}\ \mathrm{A}\,. \tag{161.3}$$

(b) Kompleksna prividna snaga koju prima prijemnik je

$$\underline{S} = 3\underline{Z}I_f^2 = 4,5(1 + j)\ \mathrm{MVA}\,. \tag{161.4}$$

162. Simetričan trofazni prijemnik, faktora snage $k = 1$, priključen je na idealan simetričan trofazni generator, kao što je prikazano na slici 162.1. Kada je prekidač Π otvoren, aktivna snaga prijemnika je $P = 6$ kW. Kolika je aktivna snaga P' prijemnika kada se prekidač Π zatvori? *(P940919)*

REŠENJE:
Kada je prekidač Π otvoren, struja u jednoj grani prijemnika ne postoji, a efektivna vrednost napona redne veze druga dve grane prijemnika je $\sqrt{3}E$. Kako se radi o čisto rezistivnom prijemniku ($k = 1$), to je njegova aktivna snaga

$$P = \frac{(\sqrt{3}E)^2}{2R} = \frac{3E^2}{2R}\,, \tag{162.1}$$

gde je R otpornost grane prijemnika.

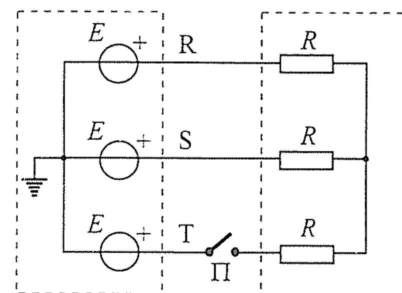
Nakon zatvaranja prekidača, efektivna vrednost napona svake grane prijemnika jednaka je E, pa snaga prijemnika iznosi

$$P' = 3\frac{E^2}{R} = 2P = 12\ \mathrm{kW}\,. \tag{162.2}$$

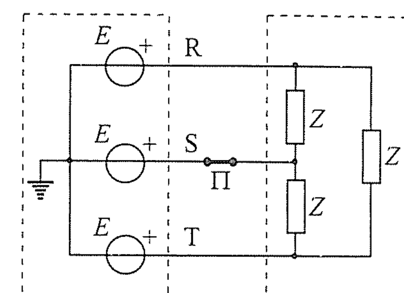
163. Za trofazno kolo prostoperiodične struje prikazano na slici 163.1 je $E = 1$ kV i $R = 900\ \Omega$ (prijemnik je čisto rezistivan). Kolika je promena snage prijemnika nakon otvaranja prekidača Π? *(P960917)*

REŠENJE:
Snaga prijemnika pri zatvorenom prekidaču Π iznosi

$$P = 3\frac{(\sqrt{3}E)^2}{R} = \frac{9E^2}{R} = 10\ \mathrm{kW}\,. \tag{163.1}$$



Slika 162.1.



Slika 163.1.

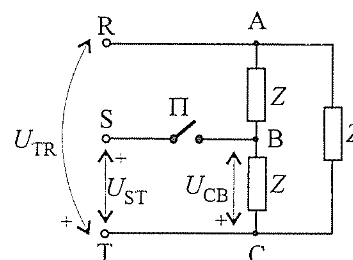
Kada se prekidač otvori, prijemnik predstavlja paralelnu vezu otpornika otpornosti $2R$ i R. Efektivna vrednost napona paralelene veze je $\sqrt{3}E$, pa je aktivna snaga prijemnika pri otvorenom prekidaču

$$P' = \frac{(\sqrt{3}E)^2}{\frac{2R}{3}} = \frac{9E^2}{2R} = 5\ \mathrm{kW}\,. \tag{163.2}$$

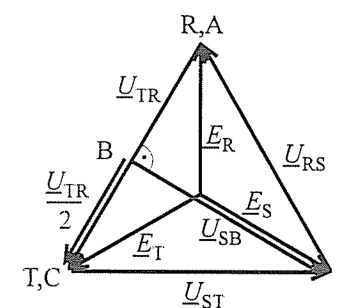
Tražena promena snage prijemnika iznosi

$$\Delta P = P' - P = -5\ \mathrm{kW}\,. \tag{163.3}$$

164. Izračunati efektivnu vrednost napona između priključaka otvorenog prekidača u kolu iz prethodnog zadatka. *(P960130)*



Slika 164.1.



Slika 164.2.

REŠENJE:
Kada je prekidač Π otvoren, kompleksni napon između njegovih priključaka je (slika 164.1)

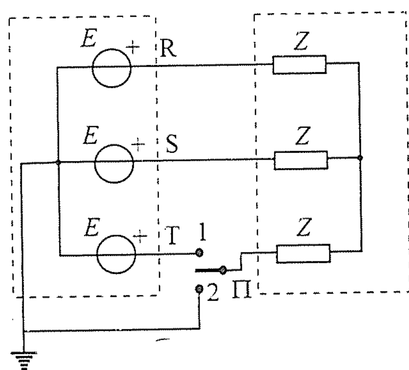
$$\underline{U}_{SB} = \underline{U}_{CB} + \underline{U}_{ST} = \frac{1}{2}\underline{U}_{TR} + \underline{U}_{ST}\,, \tag{164.1}$$

pa je efektivna vrednost ovoga napona

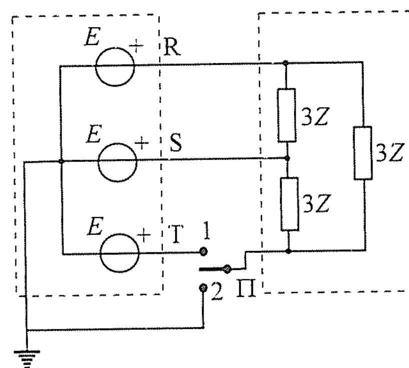
$$U_{SB} = \frac{3}{2}E = 1,5\ \mathrm{kV}\ , \tag{164.2}$$

što dobijamo na osnovu fazorskog dijagrama napona koji je za slučaj direktnog sistema elektromotornih sila generatora nacrtan na slici 164.2.

165. Simetričan trofazni pretežno induktivni prijemnik, faktora snage $k = 0,8$, priključen je na simetričan trofazni generator, kao što je prikazano na slici 165.1. Kada je preklopnik Π u položaju 1, aktivna snaga prijemnika je $P = 18$ kW. Kolike su aktivna i reaktivna snaga prijemnika kada se preklopnik prebaci u položaj 2? (*P950614*)



Slika 165.1.



Slika 165.2

REŠENJE:
Transfigurišimo zvezdu impedansi u ekvivalentan trougao (slika 165.2). Kada je preklopnik u položaju 1, aktivna snaga svake grane trougla je $P/3$.

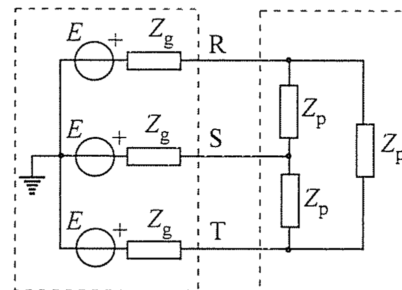
Kada se preklopnik prebaci u položaj 2, napon jedne grane trougla ostaje isti, pa i aktivna snaga te grane ostaje $P/3$. Efektivne vrednosti napona druge dve grane trougla se smanje $\sqrt{3}$ puta, pa se aktivna snaga svake grane smanji 3 puta (na $P/9$). Stoga je ukupna snaga prijemnika

$$P' = \frac{5P}{9} = 10\ \mathrm{kW}\ . \tag{165.1}$$

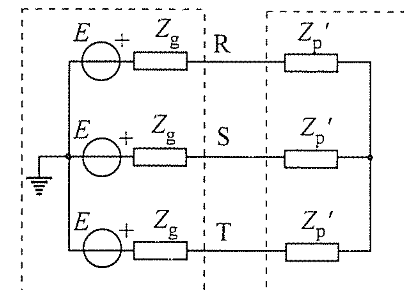
Faktor reaktivnosti prijemnika je $k_r = 0,6$, a njegov karakter pretežno induktivan, pa reaktivna snaga prijemnika iznosi

$$Q' = \frac{k_r P'}{k} = 7,5\ \mathrm{kVAr}\ . \tag{165.2}$$

166. Simetričan trofazni generator vezan je u zvezdu. Efektivna vrednost elektromotorne sile jedne faze generatora je $E = 10$ kV, a unutrašnja impedansa $\underline{Z}_g = (1+j\,2)\ \Omega$. Na generator je priključen prijemnik vezan u trougao. Impedansa jedne faze prijemnika je $\underline{Z}_p = (9 + j\,3)\ \Omega$, a impedansa voda je zanemarljivo mala. Izračunati kompleksnu prividnu snagu prijemnika. (*P930624*)



Slika 166.1.



Slika 166.2.

REŠENJE:
Dati trofazni sistem je prikazan na slici 166.1. Transfiguracijom prijemnika u ekvivalentnu zvezdu, dobijamo sistem na slici 166.2, gde je

$$\underline{Z}_p' = \frac{\underline{Z}_p}{3} = (3 + j)\ \Omega\ . \tag{166.1}$$

Kako su impedanse trofaznog voda kojim je prijemnik vezan na generator zanemarljivo male, to trofazni sistem sa slike 166.2 možemo posmatrati kao sistem u kome je trofazni generator idealan, a impedansa jedne faze prijemnika predstavlja rednu vezu impedansi $\underline{Z}_g$ i $\underline{Z}_p'$. Stoga je efektivna vrednost fazne struje prijemnika

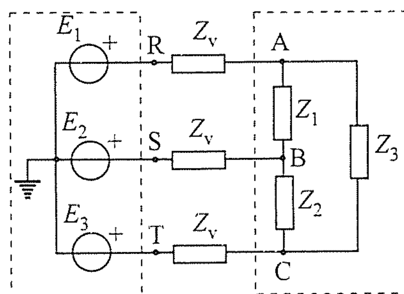
$$I_f' = \frac{E}{|\underline{Z}_g + \underline{Z}_p'|} = 2\ \mathrm{kA}\ . \tag{166.2}$$

Kompleksna prividna snaga prijemnika vezanog u zvezdu je

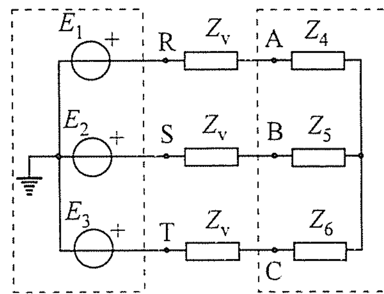
$$\underline{S}' = 3\underline{Z}_p' I_f'^2 = 12(3 + j)\ \mathrm{MVA}\ , \tag{166.3}$$

koliko iznosi i kompleksna snaga prijemnika pre transfiguracije.

167. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 167.1 poznata je efektivna vrednost elektromotornih sila trofaznog simetričnog generatora $E_1 = E_2 = E_3 = 1,5$ kV, impedansa svake faze voda $\underline{Z}_v = 0,5(1+j)\ \Omega$ i impedanse grana prijemnika $\underline{Z}_1 = -j\ \Omega$, $\underline{Z}_2 = 1\ \Omega$ i $\underline{Z}_3 = j\,2\ \Omega$. Izračunati kompleksnu prividnu snagu generatora. (*Z920825*)



Slika 167.1.



Slika 167.2.

REŠENJE:
Radi se o simetričnom sistemu elektromotornih sila generatora, pa, bez obzira na to da li je on direktan ili inverzan, imamo

$$U_{\rm RS} = U_{\rm ST} = U_{\rm TR} = \sqrt{3}E_1 = 1.5\sqrt{3}\ {\rm kV} . \qquad (167.1)$$

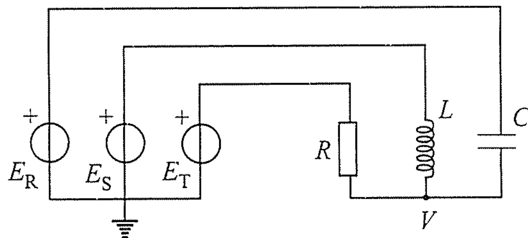
Transfiguracijom prijemnika u ekvivalentnu zvezdu, dobijamo kolo prikazano na slici 167.2, gde je $\underline{Z}_4 = (1-{\rm j})\ \Omega$, $\underline{Z}_5 = -0,5(1+{\rm j})\ \Omega$ i $\underline{Z}_6 = (1+{\rm j})\ \Omega$. Kako je

$$\underline{Z}_{\rm v} + \underline{Z}_5 = 0 , \qquad (167.2)$$

to kompleksna prividna snaga koju trofazni generator razvija i predaje ostatku kola iznosi

$$\underline{S}_{\rm g} = \frac{U_{\rm RS}^2}{(\underline{Z}_{\rm v}+\underline{Z}_4)^*} + \frac{U_{\rm ST}^2}{(\underline{Z}_{\rm v}+\underline{Z}_6)^*} = 0.9(7+{\rm j})\ {\rm MVA} . \qquad (167.3)$$

168. Na trofazan simetričan idealan generator direktnog sistema elektromotornih sila priključen je prijemnik, kao što je prikazano na slici 168.1. Linijski napon sistema je $U_l = 1$ kV, kružna učestanost $\omega = 10^3\ {\rm s}^{-1}$, a impedanse grana prijemnika iznose $Z_R = Z_L = Z_C = 1\ {\rm k}\Omega$. Početna faza elektromotorne sile $e_{\rm R}(t)$ jednaka je nuli. Koliki je trenutni potencijal zvezdišta prijemnika? (*P950924*)



Slika 168.1.

REŠENJE:
Kompleksne elektromotorne sile generatora su

$$\underline{E}_{\rm R} = E , \quad \underline{E}_{\rm S} = E\,{\rm e}^{-{\rm j}2\pi/3} , \quad \underline{E}_{\rm T} = E\,{\rm e}^{{\rm j}2\pi/3} , \qquad (168.1)$$

gde je $E = U_l/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$ kV. Metoda potencijala čvorova daje

$$\left(\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{{\rm j}Z_L} + \frac{{\rm j}}{Z_C}\right)\underline{V} = \frac{\underline{E}_{\rm T}}{Z_R} + \frac{\underline{E}_{\rm S}}{{\rm j}Z_L} + \frac{{\rm j}\underline{E}_{\rm R}}{Z_C} , \qquad (168.2)$$

odakle kompleksni potencijal zvezdišta prijemnika (u odnosu na zvezdište generatora) iznosi

$$\underline{V} = \left(1+\sqrt{3}\right) E\,{\rm e}^{{\rm j}2\pi/3} . \qquad (168.3)$$

Trenutni potencijal je

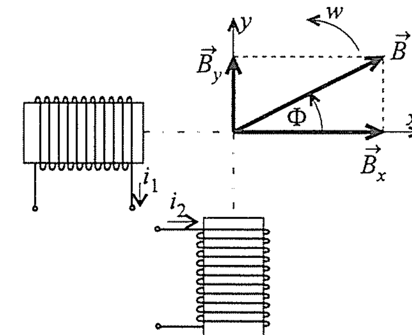
$$v(t) = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\sqrt{2}\cos\left(10^3 t + \frac{2\pi}{3}\right)\ {\rm kV} \qquad (168.4)$$

(t u s).

169. (a) Skicirati kalemove dvofaznog sistema za stvaranje obrtnog magnetskog polja. (b) Polazeći od izraza za magnetske indukcije kalemova, izvesti izraze za intenzitet i brzinu obrtanja rezultantnog vektora magnetske indukcije. (*P930221*)

REŠENJE:
(a) Na slici 169.1 je skiciran traženi sistem kalemova. Da bi se dobilo obrtno (kružno polarizovano) magnetsko polje, struje kalemova treba da budu iste učestanosti i amplitude, ali u kvadraturi (fazno pomerene za $\pi/2$). Ako usvojimo da je početna faza struje prvog kalema jednaka nuli, za ove struje imamo

$$i_1(t) = I_{\rm m}\cos\omega t , \quad i_2(t) = I_{\rm m}\cos\left(\omega t \mp \frac{\pi}{2}\right) = \pm I_{\rm m}\sin\omega t . \qquad (169.1)$$



Slika 169.1.

(b) Pod pretpostavkom da su jezgra kalemova linearna u magnetskom pogledu, kao i da su kalemovi istih karakteristika, za magnetske indukcije kalemova možemo pisati

$$B_x(t) = B_{\rm m}\cos\omega t , \quad B_y(t) = \pm B_{\rm m}\sin\omega t . \qquad (169.2)$$

Vektor rezultantne indukcije je

$$\boldsymbol{B}(t) = B_x(t)\,\boldsymbol{i} + B_y(t)\,\boldsymbol{j}\ , \tag{169.3}$$

pa intenzitet ovoga vektora u proizvoljnom trenutku vremena iznosi

$$|\boldsymbol{B}(t)| = \sqrt{B_x(t)^2 + B_y(t)^2} = B_{\mathrm{m}} \tag{169.4}$$

(vrh vektora $\boldsymbol{B}$ opisuje krug tokom vremena).

Sa slike 169.1 je

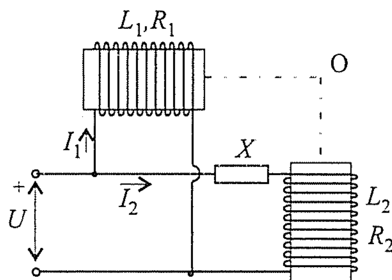
$$\operatorname{tg}\phi(t) = \frac{B_y(t)}{B_x(t)} = \pm\operatorname{tg}\omega t\ , \tag{169.5}$$

odakle za ugaonu brzinu obrtanja vektora $\boldsymbol{B}$ dobijamo

$$w = \frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t} = \pm\omega \tag{169.6}$$

(ugaona brzina obrtanja rezultantnog polja je konstantna i po intenzitetu jednaka kružnoj učestanosti struje). Pri tome [videti (169.1)], ako struja drugog kalema fazno zaostaje za strujom prvog kalema, smer obrtanja polja je suprotan smeru kretanja kazaljke na časovniku. Suprotno, ukoliko se želi obrtanje polja u smeru kretanja kazaljke na časovniku, struja drugog kalema treba fazno da prednjači struji prvog kalema.

170. Dva identična kalema, induktivnosti $L_1 = L_2 = 1/\pi$ H i otpornosti $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$, postavljena su tako da su im ose normalne i seku se, kao što je prikazano na slici 170.1. Efektivna vrednost priključenog napona je $U = 220$ V, učestanost $f = 50$ Hz, a početna faza $\theta = \pi/2$. (a) Izračunati reaktansu X koju treba vezati na red sa drugim kalemom tako da se u tački O dobije obrtno magnetsko polje. (b) U kom se smeru obrće to polje? (*P950903*)



Slika 170.1.

REŠENJE:

(a) Prema slici 170.1 je

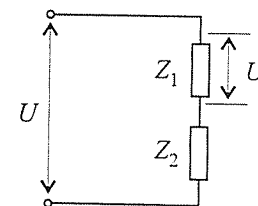
$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1}{R_2 + \mathrm{j}(\omega L_2 + X)} = \frac{100 + \mathrm{j}\,100}{100 + \mathrm{j}(100 + X)} \tag{170.1}$$

($\omega = 2\pi f$). Odavde vidimo da će uslovi za stvaranje obrtnog magnetskog polja (videti prethodni zadatak) biti ispunjeni ako je $X = -200\ \Omega$ (kondenzator). Tada je, naime,

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{1+\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}} = \mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}\ . \tag{170.2}$$

(b) Kako struja drugog kalema fazno prednjači struji prvog kalema, to se smer obrtanja polja poklapa sa smerom kretanja kazaljke na časovniku.

171. Dva prijemnika su vezana na red i priključena na prostperiodičan napon efektivne vrednosti $U = 100$ V, kao što je prikazano na slici 171.1. Pri tome je aktivna snaga redne veze $P_{\mathrm{e}} = 60$ W, reaktivna snaga prvog prijemnika $Q_1 = -30$ VAr, faktor snage prvog prijemnika $k_1 = 0,8$, efektivna vrednost napona prvog prijemnika $U_1 = 50$ V, a drugi prijemnik je pretežno kapacitivan. Izračunati kompleksne impedanse oba prijemnika. (*Z910518*)



Slika 171.1.

REŠENJE:

Kako je $Q_1 < 0$, to je prvi prijemnik pretežno kapacitivan, faktora reaktivnosti

$$\sin\varphi_1 = -\sqrt{1 - k_1^2} = -0,6\ . \tag{171.1}$$

Efektivna vrednost struje toga prijemnika iznosi

$$I = \frac{Q_1}{U_1 \sin\varphi_1} = 1\ \mathrm{A}\ . \tag{171.2}$$

Admitansa i susceptansa drugog prijemnika su, redom,

$$Y_1 = \frac{I}{U_1} = 20\ \mathrm{mS} \quad \text{i} \quad B_1 = -\frac{Q_1}{U_1^2} = 12\ \mathrm{mS}\ , \tag{171.3}$$

pa je njegova konduktansa

$$G_1 = \sqrt{Y_1^2 - B_1^2} = 16\ \mathrm{mS}\ . \tag{171.4}$$

Pošto su rezistansa i reaktansa drugog prijemnika

$$R_1 = \frac{G_1}{Y_1^2} = 40\ \Omega \quad \text{i} \quad X_1 = -\frac{B_1}{Y_1^2} = -30\ \Omega\ , \tag{171.5}$$

respektivno, njegova kompleksna impedansa iznosi

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j}X_1 = (40 - \mathrm{j}\,30)\ \Omega\ . \tag{171.6}$$

Impedansa redne veze prijemnika je

$$Z_{\mathrm{e}} = \frac{U}{I} = 100\ \Omega\ , \tag{171.7}$$

a rezistansa

$$R_{\mathrm{e}} = \frac{P}{I^2} = 60\ \Omega\ , \tag{171.8}$$

odakle sledi da je reaktansa redne veze

$$X_e = \pm\sqrt{Z_e^2 - R_e^2} = \pm 80\ \Omega\ . \tag{171.9}$$

Rezistansa drugog prijemnika je

$$R_2 = R_e - R_1 = 20\ \Omega\ . \tag{171.10}$$

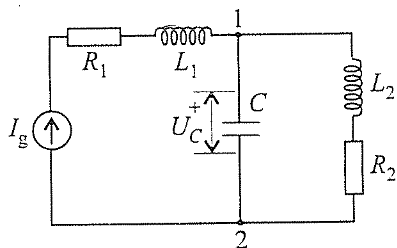
dok za njegovu reaktansu,

$$X_2 = X_e - X_1\ , \tag{171.11}$$

imamo dva rešenja: $X_2 = 110\ \Omega$ (za $X_e = 80\ \Omega$) i $X_2 = -50\ \Omega$ (za $X_e = -80\ \Omega$). Prvo rešenje otpada, jer je prijemnik pretežno kapacitivan. Stoga je kompleksna impedansa drugog prijemnika

$$\underline{Z}_2 = R_2 + \mathrm{j}X_2 = (20 - \mathrm{j}\,50)\ \Omega\ . \tag{171.12}$$

172. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 172.1 poznato je: $I_g = 3$ A, $f = 50$ Hz, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $L_1 = 50$ mH i $L_2 = 100$ mH. Izračunati kapacitivnost kondenzatora C tako da napon kondenzatora U_C bude u fazi sa strujom generatora. Kolika je tada kompleksna prividna snaga idealnog strujnog generatora? (*Z900402*)



Slika 172.1.

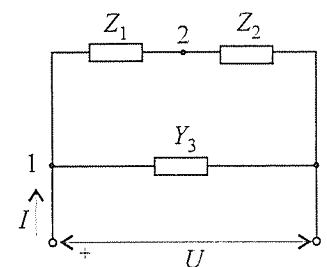
REŠENJE:
Da bi struja I_g i napon U_C bili u fazi, ekvivalentna susceptansa rednoparalelne veze R_2-L_2-C, data izrazom

$$B_{e12} = \omega C - \frac{\omega L_2}{R_2^2 + (\omega L_2)^2}\ , \tag{172.1}$$

gde je $\omega = 2\pi f$, mora biti jednaka nuli, što daje $C = 72,1\ \mu$F. Tada je ekvivalentna kompleksna impedansa ove veze $\underline{Z}_{e12} = R_{e12} = 69,35\ \Omega$, pa kompleksna prividna snaga generatora iznosi

$$\underline{S}_{I_g} = (R_1 + \mathrm{j}\omega L_1 + R_{e12})I_g^2 = (642 + \mathrm{j}\,141)\ \mathrm{VA}\ . \tag{172.2}$$

173. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 173.1 poznato je: $\underline{Y}_3 = (20 - \mathrm{j}\,50)$ mS, $\underline{Z}_2 = (6 - \mathrm{j}\,8)\ \Omega$ i $\underline{U} = (-6 + \mathrm{j}\,8)$ V. Ukupna aktivna snaga prvog i drugog prijemnika je $P_{12} = 4$ W, a efektivna vrednost struje paralelne veze $I = 1$ A. Struja I_{32} prednjači naponu U. Odrediti kompleksnu impedansu prvog prijemnika. (*Z920401*)



Slika 173.1.

REŠENJE:
Efektivna vrednost napona na koji je data veza prijemnika priključena je $U = 10$ V, pa je ekvivalentna konduktansa grane sa prvim i drugim prijemnikom

$$G_{12} = \frac{P_{12}}{U^2} = 40\ \mathrm{mS}\ . \tag{173.1}$$

Admitansa paralelne veze iznosi

$$Y_e = \frac{I}{U} = 100\ \mathrm{mS}\ , \tag{173.2}$$

pa iz relacije

$$Y_e = |G_{12} + \mathrm{j}B_{12} + \underline{Y}_3| \tag{173.3}$$

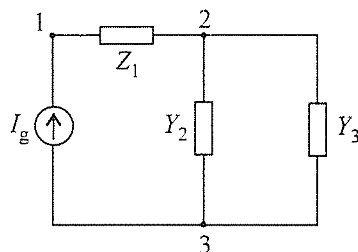
sledi $B_{12} = 130$ mS ili $B_{12} = -30$ mS. Pošto struja I_{32} prednjači naponu U, grana sa prvim i drugim prijemnikom je pretežno induktivna, odnosno $B_{12} < 0$. Stoga dolazi u obzir samo rešenje $B_{12} = -30$ mS, pa je tražena kompleksna impedansa

$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{G_{12} + \mathrm{j}B_{12}} - \underline{Z}_2 = 10(1 + \mathrm{j}\,2)\ \Omega\ . \tag{173.4}$$

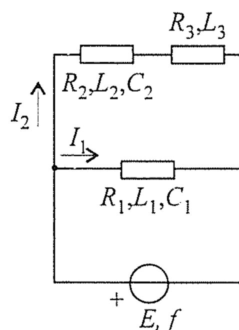
174. Za kolo prostoperiodične struje sa slike 174.1 je $\underline{Z}_1 = (25 + \mathrm{j}\,45)\ \Omega$, $\underline{U}_{23} = -(11 + \mathrm{j}\,7)$ V, $B_3 = 1/85$ S, $G_2 = 10$ mS, ukupna reaktivna snaga sva tri prijemnika $Q_e = 3,2$ VAr i $I_g = 0,2$ A. Izračunati kompleksni napon $\underline{U}_{13}$ i kompleksnu impedansu drugog prijemnika. (*Z920516*)

REZULTAT:
Tražene veličine su $\underline{U}_{13} = -16(1 + \mathrm{j})$ V i $\underline{Z}_2 = 20(1 + \mathrm{j}\,2)\ \Omega$.

175. Dva prijemnika poznatih karakteristika $R_1 = 60\ \Omega$, $L_1 = 10$ mH, $C_1 = 5\ \mu$F, $R_2 = 5\ \Omega$, $L_2 = 2$ mH i $C_2 = 2,5\ \mu$F i prijemnik poznate otpornosti $R_3 = 15\ \Omega$ i nepoznate induktivnosti L_3 vezani su kao na slici 175.1 i priključeni na idealan naponski generator prostoperiodične elektromotorne sile, amplitude $E_m = 40$ V i



Slika 174.1.



Slika 175.1.

učestanosti f. Aktivna snaga drugog prijemnika je $P_2 = 5$ W, reaktivna snaga trećeg prijemnika $Q_3 = 40$ VAr, a struja I_2 fazno kasni za elektromotornom silom E. Koliki su priraštaji aktivne i reaktivne snage koje razvija generator kada se učestanost generatora smanji i postane $f' = f/2$? (*Z970720*)

REŠENJE:
Efektivna vrednost struje drugog i trećeg prijemnika je (slika 175.1)

$$I_2 = \sqrt{\frac{P_2}{R_2}} = 1 \text{ A}, \tag{175.1}$$

pa je reaktansa trećeg prijemnika

$$X_3 = \frac{Q_3}{I_2^2} = 40 \ \Omega. \tag{175.2}$$

Impedansa redne veze drugog i trećeg prijemnika iznosi

$$Z_{23} = \frac{E}{I_2} = 20\sqrt{2} \ \Omega, \tag{175.3}$$

gde je $E = E_m/\sqrt{2} = 20\sqrt{2}$ V, odakle za reaktansu ove veze dobijamo $X_{23} = 20 \ \Omega$ (rešenje $X_{23} = -20 \ \Omega$ otpada, jer elektromotorna sila E fazno prednjači struji I_2).

Reaktansa drugog prijemnika je

$$X_2 = X_{23} - X_3 = -20 \ \Omega. \tag{175.4}$$

Kako je

$$X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}, \tag{175.5}$$

to kružna učestanost generatora predstavlja rešenje kvadratne jednačine

$$5 \cdot 10^{-9}\omega^2 + 5 \cdot 10^{-5}\omega - 1 = 0 \tag{175.6}$$

i iznosi $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$ (drugo rešenje jednačine je negativno, pa ne dolazi u obzir). Konačno,

$$L_3 = \frac{X_3}{\omega} = 4 \text{ mH}. \tag{175.7}$$

Reaktansa prvog prijemnika iznosi

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = 80 \ \Omega, \tag{175.8}$$

a efektivna vrednost struje ovoga prijemnika

$$I_1 = \frac{E}{\sqrt{R_1^2 + X_1^2}} = 0,2\sqrt{2} \text{ A}. \tag{175.9}$$

Aktivna i reaktivna snaga koje razvija generator jednake su aktivnoj i reaktivnoj snazi koje primaju prijemnici, odnosno

$$P = R_1 I_1^2 + P_2 + R_3 I_2^2 = 24,8 \text{ W} \quad \text{i} \quad Q = X_1 I_1^2 + X_2 I_2^2 + Q_3 = 26,4 \text{ VAr}, \tag{175.10}$$

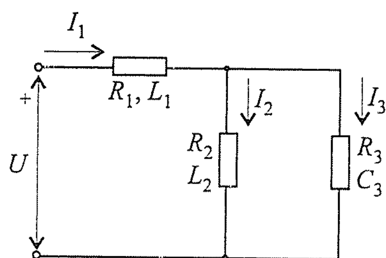
respektivno.

Kada se učestanost prepolovi, reaktanse prijemnika se promene, pa za aktivnu i reaktivnu snagu generatora dobijamo, redom, $P' = 18,5$ W i $Q' = -11,6$ VAr. Traženi priraštaji snaga iznose $\Delta P = -6,3$ W i $\Delta Q = -38$ VAr.

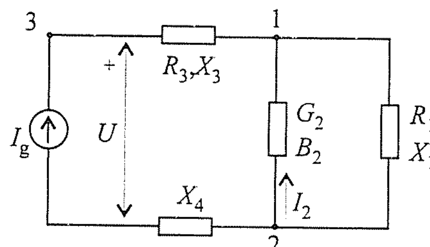
176. Tri prijemnika su vezana rednoparalelno i priključena na prostoperiodičan napon, kao na slici 176.1. Pod ovim okolnostima je kompleksna impedansa prvog prijemnika $\underline{Z}_1 = 125(1+\mathrm{j}\,3) \ \Omega$, odnos kompleksnih struja drugog i trećeg prijemnika $\underline{I}_2 : \underline{I}_3 = 0,6 - \mathrm{j}\,0,8$, aktivna i reaktivna snaga drugog prijemnika $P_2 = 0,7$ W i $Q_2 = 0,1$ VAr i efektivna vrednost i početna faza struje prvog prijemnika $I_1 = 40\sqrt{2}$ mA i $\psi_1 = -\pi/4$. Odrediti kompleksni izraz za jačinu struje prvog prijemnika kada se učestanost napona udvostruči. (*Z940405*)

REZULTAT:
Kompleksna jačina struje prvog prijemnika pri dvostrukoj učestanosti je $\underline{I}_1' = (9,65 - \mathrm{j}\,36,43)$ mA.

177. Četiri prijemnika su vezana kao na slici 177.1 i priključena na idealan strujni generator prostoperiodične struje. Pod ovim okolnostima je $R_1 = 5$ kΩ, $X_1 = 10$ kΩ, $R_3 = 1$ kΩ, $X_3 = -1$ kΩ i $X_4 = 10$ kΩ ($R_4 = 0$). Aktivna i reaktivna snaga paralelne veze prvog i drugog prijemnika su $P_{12} = 5,6$ W i $Q_{12} = -0,8$ VAr, respektivno, struja I_2 drugog prijemnika fazno zaostaje za naponom U_{12} za $3\pi/4$, a početna faza napona trećeg prijemnika U_{31} iznosi $\theta_{31} = \pi/4$. Odrediti kompleksni izraz za napon između krajeva idealnog strujnog generatora. (*Z960601*)



Slika 176.1.



Slika 177.1.

REŠENJE:
Argument kompleksne admitanse drugog prijemnika, $\underline{Y}_2 = G_2 + \mathrm{j}B_2$, je

$$\nu_2 = \psi_2' - \theta_2 = (\psi_2 \pm \pi) - \theta_2 = (\psi_2 - \theta_2) \pm \pi = -\frac{3\pi}{4} \pm \pi = \frac{\pi}{4} \tag{177.1}$$

$(-\pi/2 \leq \nu_2 \leq \pi/2)$, gde su θ_2, ψ_2 i ψ_2' početne faze napona U_{12}, struje I_2 i struje $\underline{I}_2' = -\underline{I}_2$, respektivno. Odavde je $\mathrm{tg}\,\nu_2 = 1$, odnosno

$$G_2 = B_2 . \tag{177.2}$$

Označimo sa ν_{12} argument kompleksne admitanse paralelne veze prvog i drugog prijemnika, $\underline{Y}_{12} = G_{12} + \mathrm{j}B_{12}$. Za ovaj ugao je

$$\mathrm{tg}\,\nu_{12} = \frac{B_{12}}{G_{12}} = -\frac{Q_{12}}{P_{12}} , \tag{177.3}$$

odakle sledi

$$\frac{B_1 + B_2}{G_1 + G_2} = \frac{1}{7} , \tag{177.4}$$

gde konduktansa i susceptansa prvog prijemnika iznose $G_1 = 0,04$ mS i $B_1 = -0,08$ mS, respektivno, što dobijamo na osnovu R_1 i X_1. Jednačine (177.2) i (177.4) čine sistem jednačina čije rešenje glasi: $G_2 = B_2 = 0,1$ mS.

Efektivna vrednost i početna faza struje generatora su

$$I_g = Y_{12}U_{12} = |\underline{Y}_{12}|\sqrt{\frac{P_{12}}{G_{12}}} = 20\sqrt{2}\ \mathrm{mA} \tag{177.5}$$

i

$$\psi_{I_g} = \theta_{31} - \mathrm{arctg}\,\frac{X_3}{R_3} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} . \tag{177.6}$$

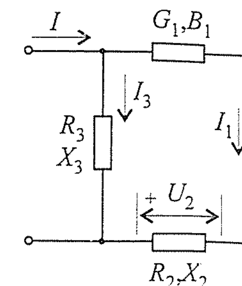
Ekvivalentna kompleksna impedansa koju "vidi" generator je

$$\underline{Z}_e = R_3 + \mathrm{j}(X_3 + X_4) + \frac{1}{\underline{Y}_{12}} = 8(1+\mathrm{j})\ \mathrm{k}\Omega , \tag{177.7}$$

pa traženi kompleksni napon između njegovih krajeva iznosi

$$\underline{U} = \underline{Z}_e \underline{I}_g = 160\sqrt{2}(-1+\mathrm{j})\ \mathrm{V} . \tag{177.8}$$

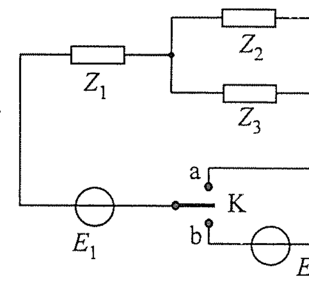
178. Tri prijemnika su vezana kao na slici 178.1 i uključena u kolo prostoperiodične struje. Poznato je: $G_1 = 1/37$ mS, $B_1 = 6/37$ mS, aktivna i reaktivna snaga redne veze prvog i drugog prijemnika $P_{12} = 0,12$ W i $Q_{12} = -0,16$ VAr, $R_3 = 3$ kΩ, $X_3 = 4$ kΩ, napon U_2 fazno zaostaje za strujom I_1 za $3\pi/4$, a početna faza struje trećeg prijemnika I_3 je $\psi_3 = \pi/4$. Odrediti kompleksnu impedansu drugog prijemnika i kompleksnu jačinu struje napojne grane, $\underline{I}$. (Z950527)



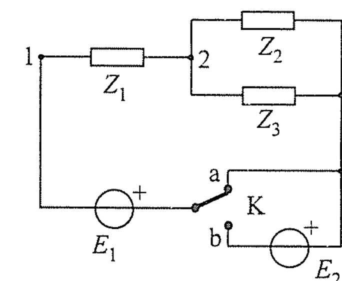
Slika 178.1.

REZULTAT:
Tražene kompleksne veličine su $\underline{Z}_2 = 2(1+\mathrm{j})$ kΩ i $\underline{I} = (-1,07 + \mathrm{j}\,7,51)$ mA.

179. Tri prijemnika, kompleksnih impedansi $\underline{Z}_1 = 125(1+\mathrm{j}\,3)\ \Omega$, $\underline{Z}_2 = 100(7+\mathrm{j})\ \Omega$ i $\underline{Z}_3 = 500(1-\mathrm{j})\ \Omega$, i generatori elektromotornih sila, nepoznate efektivne vrednosti E_1 i poznate $E_2 = 10\sqrt{5}$ V, obrazuju kolo prostoperiodične struje kao na slici 179.1. Kada je preklopnik K u položaju 'a', prividna snaga drugog prijemnika je $S_2' = \sqrt{2}/2$ VA. Po prebacivanju preklopnika u položaj 'b', aktivna snaga svih prijemnika se smanji dva puta. Kolika je fazna razlika elektromotornih sila E_1 i E_2? (Z970808)



Slika 179.1.



Slika 179.2.

REŠENJE:
Kada je preklopnik K u položaju 'a', prividna snaga drugog prijemnika je data izrazom

$$S_2' = \frac{\left(\frac{|\underline{Z}_{23}|}{|\underline{Z}_{13}|}E_1\right)^2}{|\underline{Z}_2|} , \tag{179.1}$$

gde je $\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2\underline{Z}_3/(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = 125(3-\mathrm{j})\ \Omega$ i $\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = 250(2+\mathrm{j})\ \Omega$ (slika 179.2). Odavde za elektromotornu silu prvog generatora dobijamo $E_1 = 10\sqrt{10}$ V.

Usvojimo referentne smerove elektromotornih sila E_1 i E_2 kao na slici 179.2 i označimo početne faze ovih elektromotornih sila sa θ_1 i θ_2, respektivno. Kako je aktivna snaga svih prijemnika

$$P = \mathrm{Re}\{\underline{Z}_{13}\}\left(\frac{U_{13}}{Z_{13}}\right)^2 , \qquad (179.2)$$

to, po uslovu zadatka, imamo

$$\frac{E_1^2}{|\underline{E}_1+\underline{E}_2|^2} = 2 , \qquad (179.3)$$

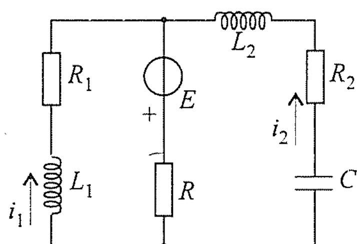
pri čemu je

$$|\underline{E}_1+\underline{E}_2|^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos(\theta_1-\theta_2) . \qquad (179.4)$$

Konačno,

$$\cos(\theta_1-\theta_2) = -\frac{\sqrt{2}}{2} . \qquad (179.5)$$

pa je tražena fazna razlika $\theta_1 - \theta_2 = \pm 3\pi/4$.



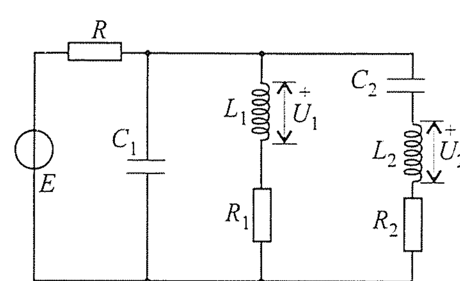
Slika 180.1.

180. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 180.1 poznato je: $E = 130$ V, $\omega = 10^8\ \mathrm{s}^{-1}$, $R = R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 2$ kΩ i $L_2 = 10$ μH. (a) Izračunati induktivnost L_1 i kapacitivnost C tako da efektivne vrednosti struja i_1 i i_2 budu jednake, a da struja i_2 fazno prednjači struji i_1 za $\pi/2$. (b) Kolika je pri tome kompleksna prividna snaga idealnog naponskog generatora? (*Z950929*)

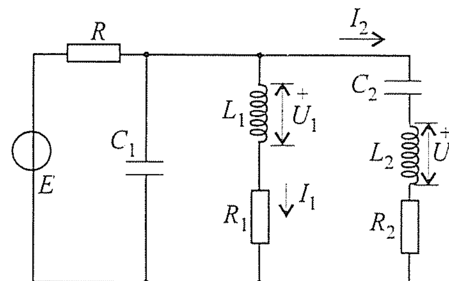
REZULTAT:
(a) Uslovi zadatka su ispunjeni kada je $L_1 = 20$ μH i $C = 5$ pF. (b) Pri tome je $\underline{S}_E = (6,5 + \mathrm{j}\,1,3)$ VA.

181. U kolu prostoperiodične struje sa slike 181.1 je $E = 220$ V, $f = 50$ Hz, $R = 10\ \Omega$, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $L_1 = 250$ mH i $L_2 = 500$ mH. (a) Odrediti kapacitivnosti kondenzatora C_1 i C_2 tako da napon U_2 fazno prednjači naponu U_1 za $\pi/2$, a reaktivna snaga idealnog naponskog generatora bude jednaka nuli. (b) Kolika je tada aktivna snaga idealnog naponskog generatora? (*Z900905*)

REŠENJE:
(a) Napon U_2 fazno prednjači naponu U_1 za $\pi/2$ ako struja I_2 fazno prednjači struji I_1 za $\pi/2$ (slika 181.2). To je ispunjeno ako između argumenata kompleksnih



Slika 181.1.



Slika 181.2.

impedansi grana sa kalemovima,

$$\varphi_1 = \mathrm{arctg}\,\frac{\omega L_1}{R_1} \quad \text{i} \quad \varphi_2 = \mathrm{arctg}\,\frac{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}{R_2} \qquad (181.1)$$

($\omega = 2\pi f$), postoji veza

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2} , \qquad (181.2)$$

odnosno

$$\mathrm{tg}\,(\varphi_1-\varphi_2) = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi_1 - \mathrm{tg}\,\varphi_2}{1+\mathrm{tg}\,\varphi_1\,\mathrm{tg}\,\varphi_2} \to \infty . \qquad (181.3)$$

Odavde je

$$\mathrm{tg}\,\varphi_1\,\mathrm{tg}\,\varphi_2 = \frac{\omega L_1\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)}{R_1R_2} = -1 , \qquad (181.4)$$

što, za zadate brojne vrednosti, daje $C_2 = 14,42$ μF.

Ekvivalentna kompleksna admitansa paralelne veze grana sa kalemovima je

$$\underline{Y}_{12} = \frac{1}{R_1+\mathrm{j}\omega L_1} + \frac{1}{R_2+\mathrm{j}(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2})} = (12,88 - \mathrm{j}\,4,53)\ \mathrm{mS} . \qquad (181.5)$$

Da bi reaktivna snaga koju razvija idealan naponski generator bila jednaka nuli, ekvivalentna impedansa koju "vidi" ovaj generator, $\underline{Z}_e$, mora biti čisto realna, pa je

$$\omega C_1 = -\mathrm{Im}\{\underline{Y}_{12}\} = 4,53\ \mathrm{mS} , \qquad (181.6)$$

tj. $C_1 = 14,42$ μF.

(b) Za kapacitivnosti određene pod (a), imamo

$$\underline{Z}_e = R_e = R + \frac{1}{\mathrm{Re}\{\underline{Y}_{12}\}} = 87,64\ \Omega , \qquad (181.7)$$

gde je R_e ekvivalentna rezistansa koju "vidi" idealan naponski generator, pa tražena aktivna snaga generatora iznosi

$$P_E = \frac{E^2}{R_e} = 552,3\ \mathrm{W} . \qquad (181.8)$$

Kapacitivnost C_2 možemo odrediti i na drugi način, koristeći se kompleksnim računom. Na osnovu drugog Kirhofovog zakona je (slika 181.2)

$$(R_1 + \mathrm{j}\omega L_1)\underline{I}_1 = \left[R_2 + \mathrm{j}\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)\right]\underline{I}_2 . \qquad (181.9)$$

Ako usvojimo da je početna faza struje I_1 nula, a imajući u vidu uslov zadatka, možemo pisati

$$\underline{I}_1 = I_1 , \qquad \underline{I}_2 = I_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2} = \mathrm{j} I_2 , \qquad (181.10)$$

pa izjednačavajući realne delove leve i desne strane jednačine (181.9) dobijamo

$$R_1 I_1 = -\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) I_2 , \qquad (181.11)$$

dok za imaginarne delove imamo

$$\omega L_1 I_1 = R_2 I_2 . \qquad (181.12)$$

Odavde je

$$\frac{R_1}{\omega L_1} = -\frac{\omega L_2 - 1/(\omega C_2)}{R_2} , \qquad (181.13)$$

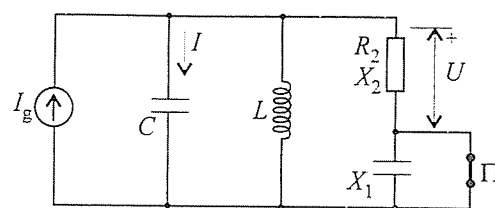
što je ekvivalentno relaciji (181.4).

182. U kolu prostoperiodične struje sa slike 182.1 je $R_2 = X_2 = -X_1 = 250\ \Omega$, $L = 50$ mH i $C = 0,5\ \mu$F. Pri zatvorenom prekidaču Π efektivne vrednosti struje kondenzatora kapacitivnosti C i napona prijemnika rezistanse R_2 i reaktanse X_2 su $I = 50\sqrt{5}$ mA i $U = 10\sqrt{5}$ V, respektivno. Koliko iznose ove efektivne vrednosti posle otvaranja prekidača Π? (*Z970605*)

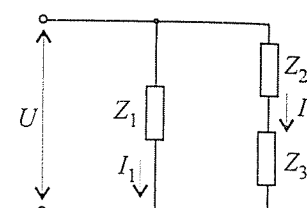
REZULTAT:
Kako su kružna učestanost i efektivna vrednost struje generatora $\omega = 10^4\ \mathrm{s}^{-1}$ i $I_\mathrm{g} = 50$ mA, to pri otvorenom prekidaču imamo $I' = 50$ mA i $U' = 10\sqrt{2}$ V.

183. Tri prijemnika su vezana kao na slici 183.1 i priključena na prostoperiodičan napon. U trenucima u kojima struja i_1 dostiže maksimum, struja i_2 prolazi kroz nulu. Prividna snaga prvog prijemnika je $S_1 = 800\sqrt{5}$ VA, a njegova reaktansa $X_1 = -1,6$ kΩ. Efektivne vrednosti napona drugog i trećeg prijemnika su $U_2 = U_3 = 1$ kV. Reaktivne snage drugog i trećeg prijemnika su $Q_2 = 0$ i $Q_3 = 1,6$ kVAr, respektivno. Izračunati kompleksne impedanse sva tri prijemnika. (*Z960930*)

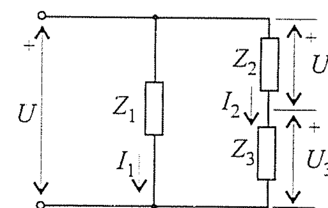
REŠENJE:
Prema uslovu zadatka, fazni pomeraj struja I_1 i I_2 je $\pi/2$. Kako je grana 1 pretežno kapacitivna (jer je $X_1 < 0$), a grana 2 pretežno induktivna (jer je $Q_2 + Q_3 > 0$), to struja I_1 fazno prednjači struji I_2 za $\pi/2$.



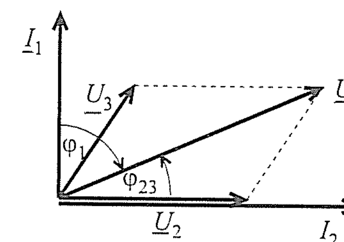
Slika 182.1.



Slika 183.1.



Slika 183.2.



Slika 183.3.

Za napone imamo $\underline{U} = \underline{U}_2 + \underline{U}_3$ (slika 183.2), pri čemu je $U_2 = U_3$. Napon U_2 je u fazi sa strujom I_2, jer je $Q_2 = 0$.

Iz fazorskog dijagrama napona i struja, prikazanog na slici 183.3, vidimo da je

$$U = 2U_2 \cos\varphi_{23} . \qquad (183.1)$$

gde je φ_{23} fazna razlika napona U i struje I_2, tj. argument ekvivalentne kompleksne impedanse redne veze drugog i trećeg prijemnika ($\varphi_{23} > 0$). Fazori $\underline{I}_1$ i $\underline{I}_2$ su normalni, pa je fazna razlika napona U i struje I_1 jednaka

$$\varphi_1 = \varphi_{23} - \frac{\pi}{2} , \qquad (183.2)$$

što predstavlja argument kompleksne impedanse prvog prijemnika ($\varphi_1 < 0$). Za ovaj prijemnik stoga imamo

$$Z_1 = \frac{X_1}{\sin\varphi_1} = \frac{|X_1|}{\cos\varphi_{23}} = \frac{2U_2|X_1|}{U} \qquad (183.3)$$

i

$$S_1 = \frac{U^2}{Z_1} = \frac{U^3}{2U_2|X_1|} . \qquad (183.4)$$

Odavde sledi

$$U = \sqrt[3]{2U_2|X_1|S_1} = 800\sqrt{5}\ \mathrm{V} . \qquad (183.5)$$

Sada je, iz (183.1), $\cos\varphi_{23} = 0,4\sqrt{5}$, $\sin\varphi_{23} = 0,2\sqrt{5}$ i $\mathrm{tg}\,\varphi_{23} = 0,5$. Rezistansa prvog prijemnika iznosi

$$R_1 = \frac{X_1}{\mathrm{tg}\,\varphi_1} = |X_1|\,\mathrm{tg}\,\varphi_{23} = 800\ \Omega , \qquad (183.6)$$

pa je njegova kompleksna impedansa $\underline{Z}_1 = (800 - \mathrm{j}\,1600)\ \Omega$.

Efektivna vrednost struje grane 2 je

$$I_2 = \frac{Q_2 + Q_3}{U \sin\varphi_{23}} = 2\ \mathrm{A}\,, \tag{183.7}$$

odakle je

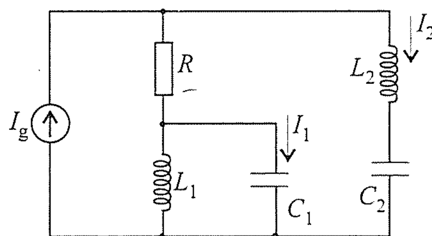
$$X_3 = \frac{Q_3}{I_2^2} = 400\ \Omega\,. \tag{183.8}$$

Drugi prijemnik je čisto rezistivan ($X_2 = 0$). Pošto su impedanse drugog i trećeg prijemnika jednake i iznose

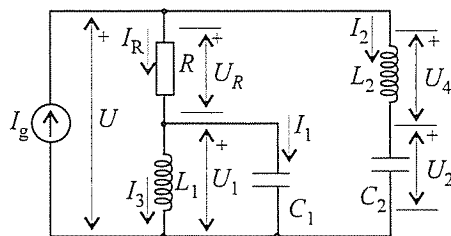
$$Z_2 = Z_3 = \frac{U_2}{I_2} = 500\ \Omega\,, \tag{183.9}$$

konačno dobijamo $\underline{Z}_2 = (500 + \mathrm{j}\,0)\ \Omega$ i $\underline{Z}_3 = (300 + \mathrm{j}\,400)\ \Omega$.

184. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 184.1 je $\omega = 10^5\ \mathrm{s}^{-1}$, $R = 20\ \Omega$, $L_1 = 100\ \mu\mathrm{H}$ i $L_2 = 400\ \mu\mathrm{H}$. Kompleksna snaga idealnog strujnog generatora je $\underline{S}_{I_g} = (5 + \mathrm{j}\,15)$ VA, a struja I_2 fazno prednjači struji I_1 za $3\pi/4$. Izračunati kapacitivnosti C_1 i C_2, kao i efektivnu vrednost struje generatora, I_g. *(Z910409)*



Slika 184.1.



Slika 184.2.

REŠENJE:

Po teoremi održanja aktivne snage u kolu, aktivna snaga strujnog generatora, $P_{I_g} = \mathrm{Re}\{\underline{S}_{I_g}\} = 5$ W, jednaka je snazi otpornika, odakle za efektivnu vrednost napona otpornika dobijamo

$$U_R = \sqrt{R\,P_{I_g}} = 10\ \mathrm{V}\,. \tag{184.1}$$

Usvojimo referentne smerove napona i struja u kolu kao na slici 184.2 i skicirajmo fazorski dijagram napona i struja kola, postavljajući fazor struje kondenzatora kapacitivnosti C_1, $\underline{I}_1$, duž fazne ose (slika 184.3). Fazor struje kalema induktivnosti L_1, $\underline{I}_3$, je orijentisan suprotno od fazora $\underline{I}_1$, a fazor napona paralelne veze L_1-C_1, $\underline{U}_1$, mora biti usmeren nadole. Struja otpornika,

$$\underline{I}_R = \underline{I}_1 + \underline{I}_3\,, \tag{184.2}$$

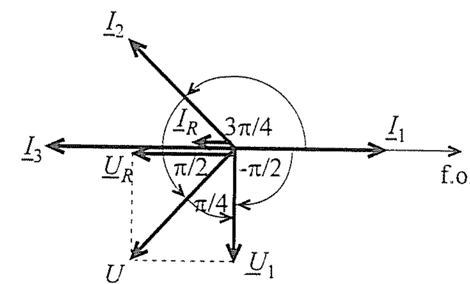
može biti u fazi sa strujom I_3 [ako je $\omega L_1 < 1/(\omega C_1)$], kao što je prikazano na slici 184.3, ili u fazi sa strujom I_1 [pod uslovom da je $\omega L_1 > 1/(\omega C_1)$]. U prvom slučaju, fazor napona

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_1 = R\underline{I}_R + \underline{U}_1 \tag{184.3}$$

je u trećem kvadrantu, dok se u drugom slučaju ovaj fazor nalazi u četvrtom kvadrantu.

Prema uslovima zadatka, fazor struje $\underline{I}_2$ je u drugom kvadrantu i sa faznom osom zaklapa ugao $3\pi/4$. Fazor napona kalema induktivnosti L_2, $\underline{U}_4$, i fazor napona kondenzatora kapacitivnosti C_2, $\underline{U}_2$, su normalni na fazor $\underline{I}_2$, pa je takav i zbir ovih fazora,

$$\underline{U}_4 + \underline{U}_2 = \underline{U}\,. \tag{184.4}$$



Slika 184.3.

Stoga fazor napona $\underline{U}$ mora ležati u prvom ili trećem kvadrantu. S obzirom da smo na osnovu relacije (184.3) zaključili da fazor $\underline{U}$ mora biti u trećem ili četvrtom kvadrantu, očigledno je da se on nalazi u trećem kvadrantu. Dakle, struje I_R i I_3 su u fazi. Sa fazorskog dijagrama vidimo da napon U fazno zaostaje za naponom U_1 za $\pi/4$, odakle sledi da su dužine fazora $\underline{U}_1$ i $\underline{U}_R$ jednake, te da je

$$U = U_R\sqrt{2} = 10\sqrt{2}\ \mathrm{V}\,. \tag{184.5}$$

Kako je paralelna veza L_1-C_1 pretežno induktivna (napon U_1 fazno prednjači struji I_R), to je ekvivalentna susceptansa ove veze B_1 negativna, pa imamo

$$B_1 = \omega C_1 - \frac{1}{\omega L_1} = -\frac{1}{R}\,. \tag{184.6}$$

Odavde je $C_1 = 500$ nF.

Reaktivna snaga paralelne veze L_1-C_1 je

$$Q_1 = -B_1 U_1^2 = 5\ \mathrm{VAr}\,, \tag{184.7}$$

pa reaktivna snaga redne veze L_2-C_2 iznosi

$$Q_2 = \mathrm{Im}\{\underline{S}_{I_g}\} - Q_1 = 10\ \mathrm{VAr} \tag{184.8}$$

(teorema održanja reaktivne snage u kolu). Ekvivalentna reaktansa veze L_2-C_2 je

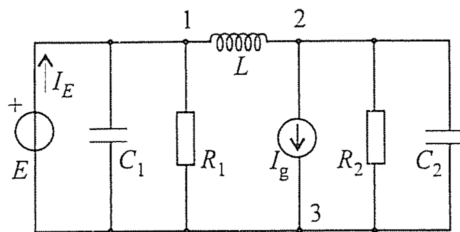
$$X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = \frac{U^2}{Q_2} = 20\ \Omega\,, \tag{184.9}$$

što daje $C_2 = 500$ nF.

Konačno, za efektivnu vrednost struje generatora dobijamo

$$I_g = \frac{|\underline{S}_{I_g}|}{U} = 500\sqrt{5}\ \mathrm{mA}\,. \tag{184.10}$$

185. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 185.1 poznato je: $R_1 = 1\ \mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 2\ \mathrm{k\Omega}$, $C_1 = 1$ nF, $C_2 = 2$ nF, $L = 2$ mH, $\omega = 10^6\ \mathrm{s^{-1}}$, $E = 2$ V i $I_g = 7$ mA. Elektromotorna sila idealnog naponskog generatora i struja idealnog strujnog generatora su u fazi. Izračunati kompleksne prividne snage ovih generatora. (*Z960204*)



Slika 185.1.

REŠENJE:
Ako usvojimo čvor 3 za referentni (videti sliku 185.1), metoda napona između čvorova daje

$$\underline{V}_1 = \underline{E}\,, \tag{185.1}$$

$$-\frac{\underline{V}_1}{\mathrm{j}\omega L} + \left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \frac{1}{R_2} + \mathrm{j}\omega C_2\right)\underline{V}_2 = -\underline{I}_g\,, \tag{185.2}$$

gde su $\underline{V}_1$ i $\underline{V}_2$ potencijali čvorova 1 i 2, respektivno. Pod pretpostavkom $\psi_{I_g} = 0$, prema uslovu zadatka imamo $\theta_E = 0$, pa rešenje sistema jednačina (185.1)-(185.2) glasi: $\underline{V}_1 = 2$ V i $\underline{V}_2 = (-2 + \mathrm{j}\,4)$ V.

Jačina struje idealnog naponskog generatora je

$$\underline{I}_E = \mathrm{j}\omega C_1 \underline{V}_1 + \frac{\underline{V}_1}{R_1} + \frac{\underline{V}_1 - \underline{V}_2}{\mathrm{j}\omega L} = 0\,, \tag{185.3}$$

pa je kompleksna prividna snaga toga generatora $\underline{S}_E = 0$. Kompleksna prividna snaga idealnog strujnog generatora iznosi

$$\underline{S}_{I_g} = -\underline{V}_2 \underline{I}_g^* = (14 - \mathrm{j}\,28)\ \mathrm{mVA}\,. \tag{185.4}$$

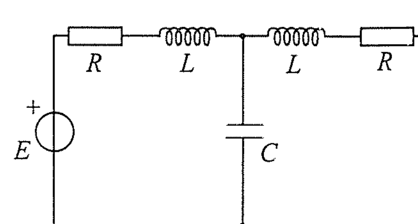
186. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 186.1 je $E = 100$ mV, $\omega = 10^8\ \mathrm{s^{-1}}$, $L = 1\ \mu$H i $C = 100$ pF. (a) Izračunati otpornost R tako da snage otpornika budu jednake. (b) Kolika je pri tome kompleksna prividna snaga idealnog naponskog generatora? (*Z910618*)

REŠENJE:
(a) Usvajajući donji čvor zadatog kola za referentni (slika 186.2), jednačina po metodi potencijala čvorova glasi

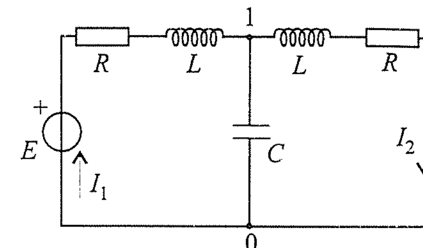
$$\left(\frac{2}{R + \mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C\right)\underline{V}_1 = \frac{\underline{E}}{R + \mathrm{j}\omega L}\,, \tag{186.1}$$

odakle za potencijal gornjeg čvora dobijamo

$$\underline{V}_1 = \frac{\underline{E}}{2 - \omega^2 LC + \mathrm{j}\omega RC}\,. \tag{186.2}$$



Slika 186.1.



Slika 186.2.

Snage otpornika će biti jednake ako su efektivne vrednosti jačina struja otpornika jednake ($I_1 = I_2$), odnosno ako je

$$|\underline{E} - \underline{V}_1| = |\underline{V}_1|\,. \tag{186.3}$$

Stoga je

$$|1 - \omega^2 LC + \mathrm{j}\omega RC| = 1 \tag{186.4}$$

i $R = 100\ \Omega$.

(b) Ako usvojimo da je početna faza elektromotorne sile idealnog naponskog generatora jednaka nuli, imamo

$$\underline{I}_1 = \frac{E - \underline{V}_1}{R + \mathrm{j}\omega L} = 0{,}5\ \mathrm{mA}\,, \tag{186.5}$$

pa kompleksna prividna snaga koju razvija ovaj generator iznosi

$$\underline{S}_\mathrm{E} = \underline{E}\,\underline{I}_1^* = 50\ \mu\mathrm{VA}\,. \tag{186.6}$$

187. Za kolo prostoperiodične struje prikazano na slici 186.1 je $E = 100$ mV, $\omega = 10^6\ \mathrm{s^{-1}}$ i $R = 200\ \Omega$. (a) Izračunati kapacitivnost C i induktivnost L tako da prividne snage kalemova budu jednake, a u trenucima kada je trenutna snaga desnog otpornika jednaka nuli, energija kondenzatora bude jednaka 1/2 maksimalne energije kondenzatora. (b) Kolika je pri tome srednja snaga svakog otpornika? (*Z950619*)

REŠENJE:
(a) Trenutna snaga desnog otpornika jednaka je nuli kada je struja toga otpornika jednaka nuli. Energija kondenzatora jednaka je polovini maksimalne energije kondenzatora u trenucima kada napon kondenzatora iznosi $U_{C\mathrm{m}}\sqrt{2}/2$, gde je $U_{C\mathrm{m}}$ amplituda napona kondenzatora. Ovi trenuci su za $T/8$ (T je period) pomereni u odnosu na trenutke kada je napon kondenzatora jednak nuli. Odavde zaključujemo da su napon kondenzatora i struja desnog otpornika fazno pomereni za $\pi/4$. Kako ta

fazna razlika, sa druge strane, mora biti jednaka argumentu kompleksne impedanse redne R-L veze, to imamo

$$\frac{\omega L}{R} = 1 , \tag{187.1}$$

odakle je $L = 200\ \mu\text{H}$.

Iz jednakosti prividnih snaga kalemova sledi jednakost efektivnih vrednosti struja kalemova, odnosno otpornika, a odatle relacija (186.4). Stoga je

$$\omega C R = 1 , \tag{187.2}$$

što daje $C = 5$ nF.

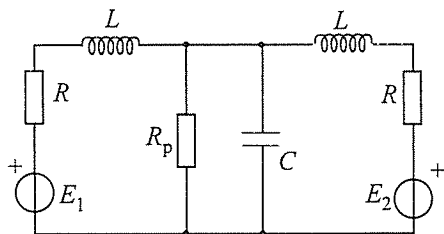
(b) Kompleksna jačina struje levog otpornika, za referentni smer struje nadesno i za početnu fazu elektromotone sile generatora jednaku nuli, data je izrazima (186.5) i (186.2), pa je efektivna vrednost ove struje $I_1 = 250\ \mu$A. Tražene srednje snage otpornika iznose

$$P_1 = P_2 = R I_1^2 = 12,5\ \mu\text{W} . \tag{187.3}$$

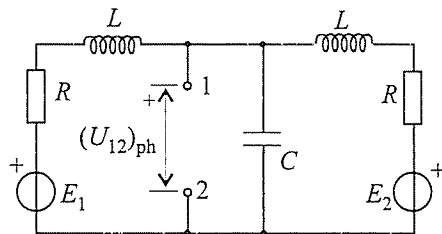
Relacija (187.2) se može dobiti i upotrebom fazorskog dijagrama napona i struja za kolo, sa koga se može videti da je efektivna vrednost struje kondenzatora $\sqrt{2}$ puta veća od efektivne vrednosti struje desne R-L veze, odakle je

$$\omega C = \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{1}{R} . \tag{187.4}$$

188. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 188.1 poznato je: $R = 100\ \Omega$, $L = 1$ mH i $C = 100$ nF. Efektivne vrednosti elektromotornih sila idealnih naponskih generatora su jednake, $E_1 = E_2 = 10$ V, kružna učestanost je $\omega = 10^5\ \text{s}^{-1}$, a elektromotorna sila E_2 fazno zaostaje za elektromotornom silom E_1 za $\Delta\theta = \pi/2$. Izračunati otpornost otpornika R_p tako da srednja snaga toga otpornika bude maksimalna. Kolika je ta maksimalna snaga? (*Z900921*)



Slika 188.1.



Slika 188.2.

REŠENJE:
U odnosu na otpornik otpornosti R_p, ostatak kola, prikazan na slici 188.2, možemo zameniti ekvivalentnim Tevenenovim generatorom (slika 188.3). Ako usvojimo da

je početna faza elektromotorne sile E_1 jednaka nuli, elektromotorna sila Tevenenovog generatora je $\underline{E}_\text{T} = (\underline{U}_{12})_\text{ph} = -\text{j}\,10$ V, što dobijamo iz jednačine po metodi potencijala čvorova za kolo sa slike 188.2. Kako je ekvivalentna kompleksna admitansa između priključaka 1 i 2 na slici 188.2 (pri čemu je odstranjeno dejstvo generatora)

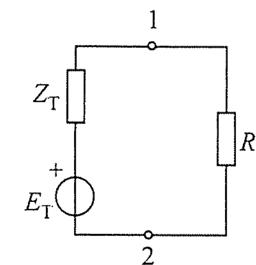
$$\underline{Y}_{e12} = \frac{2}{R + \text{j}\omega L} + \text{j}\omega C = 10\ \text{mS} , \tag{188.1}$$

to je unutrašnja kompleksna impedansa Tevenenovog generatora čisto realna i iznosi $\underline{Z}_\text{T} = 1/\underline{Y}_{e12} = R_\text{T} = 100\ \Omega$.

Po teoremi o prilagođenju prijemnika po snazi, srednja snaga otpornika otpornosti R_p će biti maksimalna ako je

$$R_\text{p} = R_\text{T} = 100\ \Omega . \tag{188.2}$$

Tada je ova snaga data izrazom (145.4) i iznosi $(P_\text{p})_\text{max} = 0,25$ W.



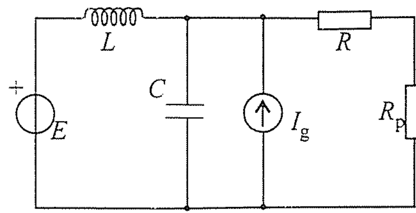
Slika 188.3.

189. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 189.1 poznato je: $E = 10$ V, $I_\text{g} = 0,1$ A, $L = 50\ \mu$H, $C = 10$ nF, $R = 100\ \Omega$ i $\omega = 10^6\ \text{s}^{-1}$. Struja strujnog generatora fazno prednjači elektromotornoj sili naponskog generatora za $\pi/2$. (a) Izračunati otpornost otpornika R_p tako da srednja snaga ovog otpornika bude maksimalna. (b) Kolika je ta snaga? (c) Kolika je pri tome kompleksna prividna snaga strujnog generatora? (*Z920131*)

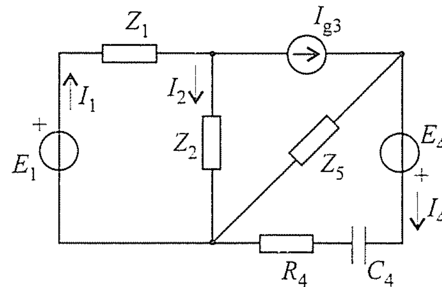
REZULTAT:
(a) Zamenjujući deo kola levo od otpornika otpornosti R_p Tevenenovim generatorom, uslov prilagođenja po snazi čisto rezistivnog prijemnika (138.5) daje $R_\text{p} = 100\sqrt{2}\ \Omega$. (b) Maksimalna srednja snaga prijemnika je $(P_\text{p})_\text{max} = 0,207$ W. (c) Kompleksna prividna snaga koju razvija strujni generator iznosi $\underline{S}_{I_\text{g}} = -(0,353 + \text{j}\,0,853)$ VA.

190. Za kolo prostoperiodične struje prikazano na slici 190.1 je poznato: $\omega = 10^5\ \text{s}^{-1}$, $\underline{Z}_1 = \text{j}\,5\ \Omega$, $\underline{Z}_2 = 10\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$, $C_4 = 10/7\ \mu$F, $\underline{Z}_5 = (1 + \text{j}\,2)\ \Omega$, $I_1 = I_\text{g3} = 0,1\sqrt{2}$ A i $E_4 = 1$ V. Struja I_g3 fazno zaostaje za elektromotornom silom E_4 za $\pi/4$, a struja I_1 fazno zaostaje za strujom I_g3 za $\pi/2$. Početna faza struje I_2 je $\psi_2 = -\pi/2$. (a) Odrediti kompleksni izraz za jačinu struje $\underline{I}_4$. (b) Utvrditi da li se aparat elektromotorne sile E_1 ponaša kao generator ili kao prijemnik. (*Z970720*)

REZULTAT:
(a) Jačina struje četvrte grane je $\underline{I}_4 = 20(-7 + \text{j}\,6)$ mA. (b) Aktivna snaga koju razvija aparat elektromtorne sile E_1 je $P_{E_1} = 0,2\ \text{W} > 0$, pa zaključujemo da se ovaj aparat ponaša kao generator.



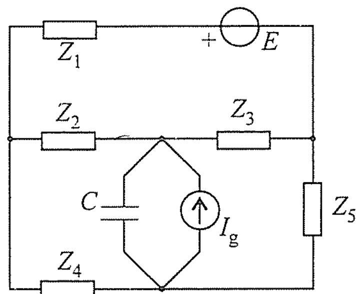
Slika 189.1.



Slika 190.1.

191. Za kolo prostoperiodične struje prikazano na slici 191.1 je poznato: $\underline{E} = (13 + \mathrm{j}\,9)$ V, $\underline{I}_g = -\mathrm{j}\,0,15$ A, $\underline{Z}_1 = (100 + \mathrm{j}\,100)\ \Omega$, $\underline{Z}_2 = (70 + \mathrm{j}\,10)\ \Omega$, $\underline{Z}_3 = (30 - \mathrm{j}\,10)\ \Omega$, $\underline{Z}_4 = -\mathrm{j}\,20\ \Omega$ i $\underline{Z}_5 = 40\ \Omega$. Odrediti reaktansu kondenzatora kapacitivnosti C tako da idealan strujni generator razvija samo reaktivnu snagu. (*Z970629*)

REZULTAT:
Reaktansa kondenzatora je $X = -10\ \Omega$.

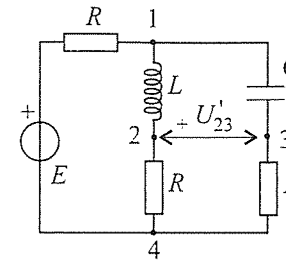


Slika 191.1.

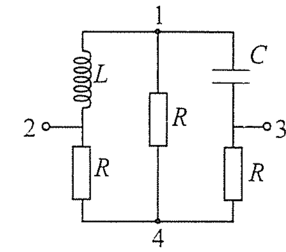
Slika 192.1.

192. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 192.1 poznata je efektivna vrednost elektromotorne sile generatora $E = 1$ mV, otpornost $R = 50\ \Omega$, induktivnost $L = 2,5\ \mu$H, kapacitivnost $C = 1$ nF i kružna učestanost $\omega = 2 \cdot 10^7\ \mathrm{s}^{-1}$. (a) Kolika treba da bude otpornost otpornika R_p da bi srednja snaga ovog otpornika bila maksimalna? (b) Kolika je ta snaga? (c) Kolika je pri tome kompleksna prividna snaga generatora koji je predstavljen rednom vezom idealnog naponskog generatora i otpornika otpornosti R? (*Z900202*)

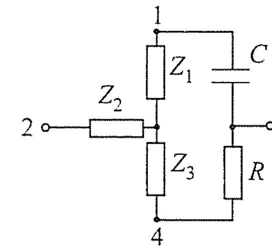
REŠENJE:
(a)-(b) Za rešavanje prvog dela zadatka, pogodno je deo kola prikazan na slici 192.2 zameniti Tevenenovim generatorom. Kako za date brojne vrednosti ekvivalentna



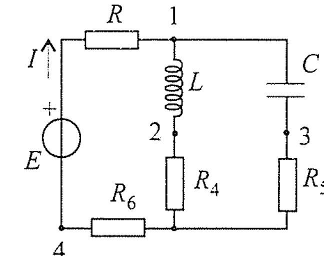
Slika 192.2.



Slika 192.3.



Slika 192.4.



Slika 192.5.

kompleksna impedansa paralelne veze grane sa kalemom i grane sa kondenzatorom iznosi $\underline{Z}'_{e14} = R$, to je $\underline{U}'_{14} = \underline{E}/2 = 0,5$ mV, pri čemu je usvojeno $\theta_E = 0$ ($\underline{E} = E$). Odavde je

$$\underline{U}'_{23} = -\underline{U}'_{34} + \underline{U}'_{24} = -\frac{R}{R + 1/(\mathrm{j}\omega C)}\underline{U}'_{14} + \frac{R}{R + \mathrm{j}\omega L}\underline{U}'_{14} = -\mathrm{j}\,0,5\ \mathrm{mV}\,, \quad (192.1)$$

koliko iznosi i elektromotorna sila Tevenenovog generatora, $\underline{E}_\mathrm{T}$, za odgovarajući referentni smer.

Kompleksna impedansa Tevenenovog generatora, $\underline{Z}_\mathrm{T}$, jednaka je ekvivalentnoj kompleksnoj impedansi mreže prikazane na slici 192.3. U ovoj mreži, trougao koji čine kalem i dva otpornika možemo transfigurisati u ekvivalentnu zvezdu, impedansi $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = (10 + \mathrm{j}\,20)\ \Omega$ i $\underline{Z}_3 = (20 - \mathrm{j}\,10)\ \Omega$ (slika 192.4), pa je $\underline{Z}_\mathrm{T} = 25\ \Omega = R_\mathrm{T}$.

Srednja snaga otpornika otpornosti R_p je maksimalna kada je $R_\mathrm{p} = R_\mathrm{T} = 25\ \Omega$. Ta snaga iznosi $(P_\mathrm{p})_\mathrm{max} = E_\mathrm{T}^2/(4R_\mathrm{p}) = 2,5$ nW.

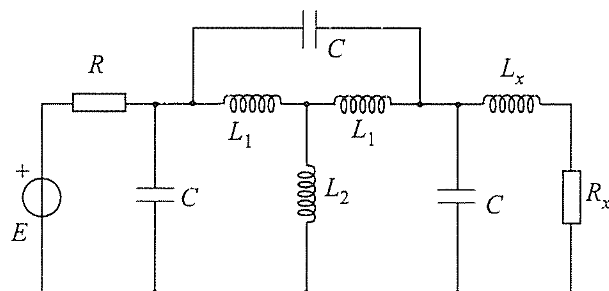
(c) Ekvivalentna kompleksna impedansa mosta koji čine kalem, kondenzator i tri otpornika u kolu sa slike 192.1 je $\underline{Z}_{e14} = 150\ \Omega$, što dobijamo nakon transfiguracije trougla otpornika u zvezdu čije su otpornosti $R_4 = R_5 = 10\ \Omega$ i $R_6 = 20\ \Omega$ (slika 192.5). Kompleksna jačina struje generatora ($\underline{E}$, R) iznosi

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R + \underline{Z}_{e14}} = 5\ \mu\mathrm{A}\,, \quad (192.2)$$

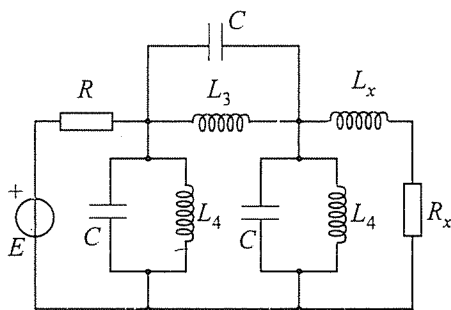
pa je njegova kompleksna prividna snaga

$$\underline{S}_g = \underline{U}_{14}\underline{I}^* = \underline{Z}_{e14} I^2 = 3,75\ \mathrm{nVA}\,. \quad (192.3)$$

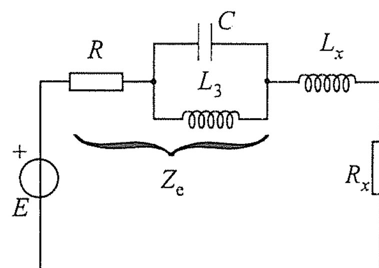
193. Za kolo prostoperiodične struje prikazano na slici 193.1 je poznato: $E = 1\,\mathrm{mV}$, $\omega = 10^7\,\mathrm{s}^{-1}$, $R = 100\,\Omega$, $L_1 = 60\,\mu\mathrm{H}$, $L_2 = 20\,\mu\mathrm{H}$ i $C = 100\,\mathrm{pF}$. Izračunati induktivnost L_x i otpornost R_x tako da srednja snaga otpornika otpornosti R_x bude maksimalna, kao i tu maksimalnu snagu. (*Z940620*)



Slika 193.1.



Slika 193.2.



Slika 193.3.

REŠENJE:
Posle transfiguracije zvezde kalemova u trougao, kolo dobija oblik kao na slici 193.2, pri čemu je

$$L_3 = 2L_1 + \frac{L_1^2}{L_2} = 300\,\mu\mathrm{H} \quad \text{i} \quad L_4 = L_1 + 2L_2 = 100\,\mu\mathrm{H}\,. \tag{193.1}$$

Kompleksna admitansa paralelne veze kondenzatora kapacitivnosti C i kalema induktivnosti L_4 je

$$\underline{Y}_0 = \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L_4}\right) = 0\,, \tag{193.2}$$

što predstavlja otvorenu vezu. Tako dobijamo kolo sa slike 193.3, koje možemo posmatrati kao prosto kolo koje čine realan naponski generator kompleksne elektromotorne sile $\underline{E}$ i unutrašnje kompleksne impedanse

$$\underline{Z}_e = R - \mathrm{j}\frac{\omega L_3}{\omega^2 L_3 C - 1} = (100 - \mathrm{j}\,1500)\,\Omega \tag{193.3}$$

i prijemnik kompleksne impedanse $\underline{Z}_x = R_x + \mathrm{j}\omega L_x$.

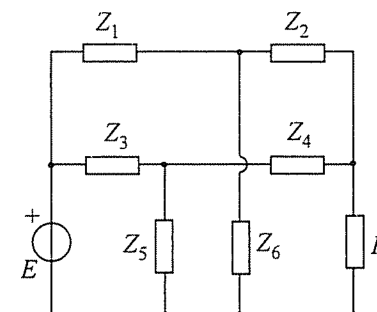
Srednja snaga otpornika otpornosti R_x jednaka je srednjoj (aktivnoj) snazi prijemnika kompleksne impedanse $\underline{Z}_x$ i doseže svoj maksimum kada je

$$\underline{Z}_x = \underline{Z}_e^*\,, \tag{193.4}$$

odakle sledi $R_x = 100\,\Omega$ i $L_x = 150\,\mu\mathrm{H}$. Ovaj maksimum iznosi

$$P_{\mathrm{max}} = \frac{E^2}{4R_x} = 2,5\,\mathrm{nW}\,. \tag{193.5}$$

194. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 194.1 poznato je: $E = 10\,\mathrm{V}$, $\underline{Z}_1 = -\mathrm{j}\,2\,\Omega$, $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_4 = \mathrm{j}\,2\,\Omega$, $\underline{Z}_3 = 2\,\Omega$, $\underline{Z}_5 = -\mathrm{j}\,\Omega$ i $\underline{Z}_6 = 1\,\Omega$. Izračunati otpornost otpornika R tako da srednja snaga ovog otpornika bude maksimalna. Kolika je ta maksimalna snaga? (*Z930619*)



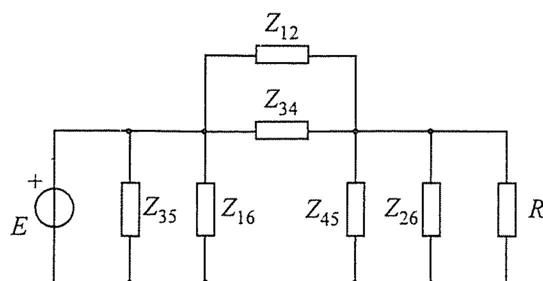
Slika 194.1.

REŠENJE:
Transfiguracijom zvezde impedansi $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ i $\underline{Z}_6$ i zvezde impedansi $\underline{Z}_3$, $\underline{Z}_4$ i $\underline{Z}_5$ u odgovarajuće trouglove impedansi, dobijamo kolo prikazano na slici 194.2, gde je $\underline{Z}_{12} = 4\,\Omega$, $\underline{Z}_{16} = -\mathrm{j}\,2\,\Omega$, $\underline{Z}_{26} = \mathrm{j}\,2\,\Omega$, $\underline{Z}_{34} = (-2 + \mathrm{j}\,2)\,\Omega$, $\underline{Z}_{35} = (1 - \mathrm{j})\,\Omega$ i $\underline{Z}_{45} = (1 + \mathrm{j})\,\Omega$. Ovo kolo dalje uprošćujemo izostavljanjem grana koje su vezane paralelno idealnom naponskom generatoru, te zamenom paralelne veze impedansi $\underline{Z}_{12}$ i $\underline{Z}_{34}$ impedansom $\underline{Z}_a = \mathrm{j}\,4\,\Omega$ i paralelne veze impedansi $\underline{Z}_{45}$ i $\underline{Z}_{26}$ impedansom $\underline{Z}_b = (0,4 + \mathrm{j}\,0,8)\,\Omega$ (slika 194.3). Konačno, generator elektromotorne sile $\underline{E}$ i prijemnike impedansi $\underline{Z}_a$ i $\underline{Z}_b$ možemo ekvivalentirati Tevenenovim generatorom, efektivne vrednosti elektromotorne sile $E_{\mathrm{T}} = 10/\sqrt{29}\,\mathrm{V}$ i impedanse $\underline{Z}_{\mathrm{T}} = (0,276 + \mathrm{j}\,0,69)\,\Omega$.

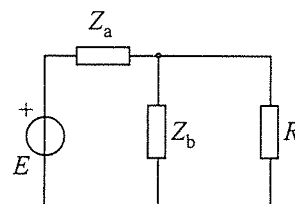
Srednja snaga otpornika otpornosti R ima maksimum kada je $R = |\underline{Z}_{\mathrm{T}}| = 0,743\,\Omega$. Ovaj maksimum iznosi $(P_R)_{\mathrm{max}} = 1,69\,\mathrm{W}$.

195. Radi određivanja učestanosti generatora formirano je kolo prostoperiodične struje kao na slici 195.1. Podešavanjem otpornosti R i kapacitivnosti C struja kroz granu sa ampermetrom je dovedena na nulu. Odrediti izraz za učestanost generatora. (*Z970605*)

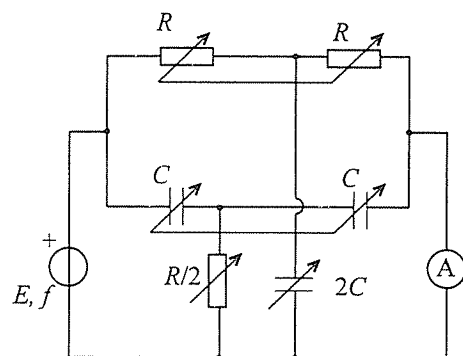
REZULTAT:
Traženi izraz glasi: $f = 1/(2\pi RC)$.



Slika 194.2.



Slika 194.3.

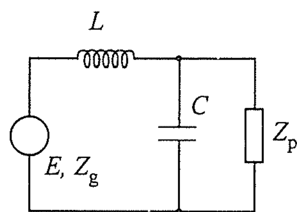


Slika 195.1.

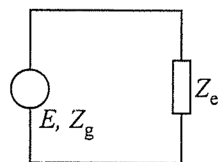
196. U kolu prostoperiodične struje sa slike 196.1 je $E = 35$ kV, $f = 685$ kHz, $\underline{Z}_g = (150 + \mathrm{j}\,0)\ \Omega$ i $\underline{Z}_p = (200 - \mathrm{j}\,300)\ \Omega$. Izračunati induktivnost L i kapacitivnost C tako da aktivna snaga generatora bude maksimalna, kao i tu maksimalnu snagu. *(Z960909)*

REŠENJE:
Dato kolo možemo predstaviti kao na slici 196.2, pri čemu je

$$\underline{Z}_e = \mathrm{j}\omega L + \frac{G_p}{G_p^2 + (B_p + \omega C)^2} - \mathrm{j}\,\frac{B_p + \omega C}{G_p^2 + (B_p + \omega C)^2}\,. \qquad (196.1)$$



Slika 196.1.



Slika 196.2.

U gornjem izrazu, $G_p = \mathrm{Re}\{1/\underline{Z}_p\} = 1,538$ mS i $B_p = \mathrm{Im}\{1/\underline{Z}_p\} = 2,308$ mS su konduktansa i susceptansa prijemnika kompleksne impedanse $\underline{Z}_p$, respektivno, dok je $\omega = 2\pi f = 4,304 \cdot 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$ kružna učestanost generatora.

Da bi se između generatora $(\underline{E}, \underline{Z}_g)$ i prijemnika impedanse $\underline{Z}_e$ ostvario prenos maksimalne aktivne snage, mora biti ispunjen uslov

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_g^* = (150 + \mathrm{j}\,0)\ \Omega\,, \qquad (196.2)$$

odnosno $R_e = 150\ \Omega$ i $X_e = 0$. Iz $R_e = 150\ \Omega$ sledi jednačina $B_p + \omega C = \pm 2,808$ mS, čije je prvo rešenje $C = 116$ pF, dok drugo rešenje predstavlja negativnu kapacitivnost, pa ga odbacujemo. Sada iz $X_e = 0$ dobijamo $L = 63,6\ \mu$H.

Konačno, maksimalna aktivna snaga koju razvija generator, odnosno prima prijemnik na slici 196.2, iznosi

$$P_{\max} = \frac{E^2}{4R_e} = 2,04\ \mathrm{MW}\,. \qquad (196.3)$$

Kolo sa slike 196.1 predstavlja uprošćeno kolo za prilagođenje srednjetalasne antene prvog programa Radio Beograda.

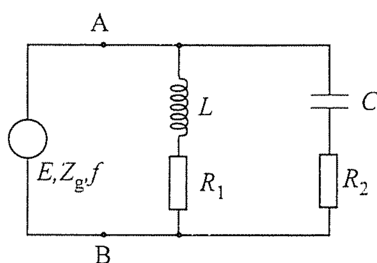
197. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 197.1 efektivna vrednost elektromotorne sile generatora je $E = 10$ V, unutrašnja kompleksna impedansa $\underline{Z}_g = (4 + \mathrm{j}\,0)\ \Omega$, a učestanost f se može menjati. (a) Odrediti otpornosti R_1 i R_2, induktivnost L i kapacitivnost C tako da budu ispunjeni sledeći uslovi: (1) aktivna snaga koju prima deo kola desno od tačaka A i B je maksimalna pri svim učestanostima i (2) pri učestanosti $f = f_0 = 1$ kHz srednje snage otpornika otpornosti R_1 i R_2 su jednake. (b) Izračunati srednje snage ovih otpornika pri učestanostima $f_1 = 100$ Hz i $f_2 = 10$ kHz. *(Z900612)*

REZULTAT:
(a) Traženi parametri kola su $R_1 = R_2 = 4\ \Omega$, $L = 636,6\ \mu$H i $C = 39,79\ \mu$F.
(b) Pri učestanosti f_1 srednje snage otpornika otpornosti R_1 i R_2 iznose 6,188 W i 0,0619 W, respektivno. Pri učestanosti f_2 odgovarajuće snage su 0,0619 W i 6,188 W.

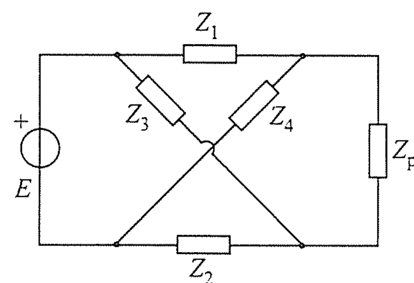
Kolo je skretnica u zvučnoj kutiji sa dva zvučnika.

198. Za kolo prostoperiodične struje sa slike 198.1 je $\underline{E} = (30 - \mathrm{j}\,10)$ V, $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 1$ kΩ i $\underline{Z}_3 = \underline{Z}_4 = \mathrm{j}\,500\ \Omega$. Faktor snage pretežno kapacitivnog prijemnika impedanse Z_p je $k = 0,8$. Odrediti impedansu Z_p prijemnika tako da njegova aktivna snaga bude maksimalna. Kolika je ta maksimalna snaga? *(Z950908)*

REŠENJE:
U odnosu na prijemnik impedanse $\underline{Z}_p = R_p + \mathrm{j}X_p$, ostatak kola možemo zameniti Tevenenovim generatorom, efektivne vrednosti elektromotorne sile $E_T = 10\sqrt{10}$ V i unutrašnje impedanse $\underline{Z}_T = (400 + \mathrm{j}\,800)\ \Omega = R_T + \mathrm{j}X_T$.



Slika 197.1.



Slika 198.1.

Srednja snaga prijemnika je

$$P_\mathrm{p} = \frac{R_\mathrm{p} E^2}{(R_\mathrm{T} + R_\mathrm{p})^2 + (X_\mathrm{T} + X_\mathrm{p})^2} = \frac{k Z_\mathrm{p} E^2}{(R_\mathrm{T} + k Z_\mathrm{p})^2 + (X_\mathrm{T} + k_\mathrm{r} Z_\mathrm{p})^2}\,, \qquad (198.1)$$

gde je $k_r = 0,6$ faktor reaktivnosti prijemnika. Postavljajući uslov

$$\frac{\mathrm{d}P_\mathrm{p}}{\mathrm{d}Z_\mathrm{p}} = 0\,, \qquad (198.2)$$

dobijamo jednačinu

$$(R_\mathrm{T} + kZ_\mathrm{p})^2 + (X_\mathrm{T} + k_\mathrm{r} Z_\mathrm{p})^2 - 2Z_\mathrm{p}[k(R_\mathrm{T} + kZ_\mathrm{p}) + k_\mathrm{r}(X_\mathrm{T} + k_\mathrm{r} Z_\mathrm{p})] = 0\,, \qquad (198.3)$$

iz koje sledi

$$Z_\mathrm{p}^2 = R_\mathrm{T}^2 + X_\mathrm{T}^2\,. \qquad (198.4)$$

Prema tome, impedansa prijemnika pri kojoj je njegova srednja snaga maksimalna (pod uslovom da je faktor snage prijemnika konstantan) iznosi $Z_\mathrm{p} = Z_\mathrm{T} = 400\sqrt{5}\ \Omega$. Ta maksimalna snaga je $(P_\mathrm{p})_\mathrm{max} = 0,545$ W.

199. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 199.1 poznato je $E = 10$ V, $I_\mathrm{g} = 1$ A, $\underline{Z}_1 = (5 - \mathrm{j}\,5)\ \Omega$ i $\underline{Z}_3 = (10 + \mathrm{j}\,20)\ \Omega$. Struja idealnog strujnog generatora fazno zaostaje za elektromotornom silom idealnog naponskog generatora za $\pi/2$. Izračunati reaktansu X_2 drugog, čisto reaktivnog, prijemnika, tako da aktivna snaga idealnog strujnog generatora bude minimalna. Kolika je tada kompleksna prividna snaga toga generatora? (*Z921020*)

REŠENJE:
Usvojimo da je početna faza struje idealnog strujnog generatora jednaka nuli ($\underline{I}_\mathrm{g} = I_\mathrm{g}$). Tada je prema uslovu zadatka $\underline{E} = \mathrm{j}E$. Ako čvor 2 uzmemo za referentni (slika 199.1), jednačina po metodi napona između čvorova glasi

$$(\underline{Y}_1 + \mathrm{j}B_2)\underline{U}_{12} = \underline{Y}_1\underline{E} + \underline{I}_\mathrm{g}\,, \qquad (199.1)$$

gde je $\underline{Y}_1 = 1/\underline{Z}_1$ i $B_2 = -1/X_2$. Zamenom brojnih vrednosti, odavde dobijamo

$$\underline{U}_{12} = \frac{0,1 + B_2 + \mathrm{j}\,0,1}{0,01 + (0,1 + B_2)^2}\ \mathrm{V} \qquad (199.2)$$

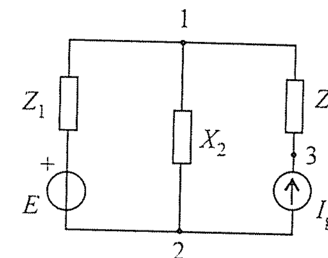
(B_2 u S).

Kompleksna prividna snaga idealnog strujnog generatora je

$$\underline{S}_{I_g} = \underline{U}_{32}\underline{I}_\mathrm{g}^* = (\underline{U}_{12} + \underline{Z}_3\underline{I}_\mathrm{g})\underline{I}_\mathrm{g}^* = \underline{U}_{12}\underline{I}_\mathrm{g}^* + \underline{Z}_3 I_\mathrm{g}^2\,, \qquad (199.3)$$

pa je aktivna snaga ovog generatora data sledećim izrazom

$$P_{I_g} = 10 + \frac{0,1 + B_2}{0,01 + (0,1 + B_2)^2}\ \mathrm{W}\,. \qquad (199.4)$$



Slika 199.1.

Računanjem prvog izvoda i analizom grafika funkcije $P_{I_g}(B_2)$, zaključujemo da ona ima minimum kada je $B_2 = -0,2$ S, pa tražena reaktansa iznosi $X_2 = 5\ \Omega$. Pri tome je $\underline{S}_{I_g} = (5 + \mathrm{j}\,25)$ VA.

200. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 200.1 poznato je: $\underline{I}_{g1} = 60(2 + \mathrm{j})$ mA, $\underline{E}_3 = -\mathrm{j}\,30$ V, $\underline{E}_4 = 10(3 + \mathrm{j}\,2)$ V, $\underline{Z}_1 = \mathrm{j}\,500\ \Omega$, $\underline{Z}_3 = 200(3 - \mathrm{j}\,4)\ \Omega$, $\underline{Z}_4 = 100(3 + \mathrm{j}\,20)\ \Omega$, $\underline{Z}_5 = 100(3 + \mathrm{j}\,4)\ \Omega$ i priraštaj kompleksne prividne snage koju razvija idealan strujni generator $\underline{I}_{g1}$ posle prebacivanja preklopnika K iz položaja (1) u položaj (2) $\Delta\underline{S}_{g1} = 0,6(-3 + \mathrm{j}\,4)$ VA. Odrediti kompleksni izraz za jačinu struje strujnog generatora $\underline{I}_{g2}$. (*Z970428*)

REŠENJE:
Na osnovu teorema kompenzacije i superpozicije, napon generatora struje $\underline{I}_{g1}$ u stacionarnom stanju kada je preklopnik K u položaju (1) možemo predstaviti kao zbir odziva kola na eksitaciju $\underline{I}_{g2}$ i odziva kola na ostale eksitacije,

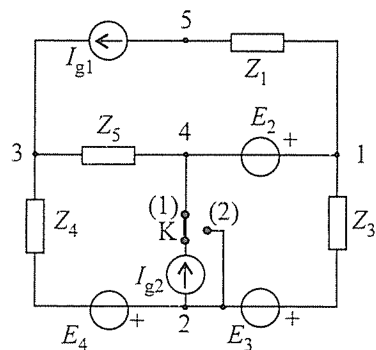
$$\underline{U}_{35}^{(1)} = \underline{U}_{35}(\underline{I}_{g2}) + \underline{U}_{35}(\underline{I}_{g1}, \underline{E}_2, \underline{E}_3, \underline{E}_4)\,. \qquad (200.1)$$

Prebacivanjem preklopnika u položaj (2) ukida se dejstvo eksitacije $\underline{I}_{g2}$, pa u novom stacionarnom stanju imamo

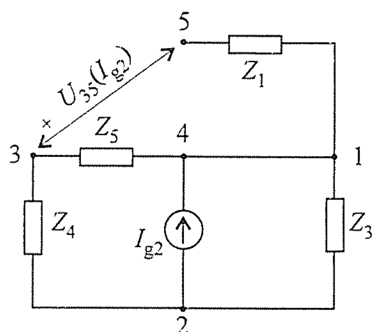
$$\underline{U}_{35}^{(2)} = \underline{U}_{35}(\underline{I}_{g1}, \underline{E}_2, \underline{E}_3, \underline{E}_4)\,. \qquad (200.2)$$

Odavde je promena napona $\underline{U}_{35}$ od jednog do drugog stacionarnog stanja

$$\Delta\underline{U}_{35} = \underline{U}_{35}^{(2)} - \underline{U}_{35}^{(1)} = -\underline{U}_{35}(\underline{I}_{g2})\,. \qquad (200.3)$$



Slika 200.1.



Slika 200.2.

Kako prema slici 200.2 imamo

$$\underline{U}_{35}(\underline{I}_{g2}) = -\frac{\underline{Z}_3\underline{Z}_5}{\underline{Z}_3+\underline{Z}_4+\underline{Z}_5}\underline{I}_{g2} , \tag{200.4}$$

a uslov zadatka daje

$$\Delta\underline{U}_{35} = \frac{\Delta\underline{S}_{g1}}{\underline{I}^*_{g1}} = 10(-2+\mathrm{j})\ \mathrm{V} , \tag{200.5}$$

to za kompleksnu jačinu struje drugog strujnog generatora dobijamo $\underline{I}_{g2} = -40(2+\mathrm{j})$ mA.

201. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 201.1 poznato je: $\omega = 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$, $R = 100\ \Omega$, $L = 300\ \mu\mathrm{H}$, $C_1 = 10$ nF i $C_2 = 5$ nF. Reaktivna snaga kalema induktivnosti L je $Q_L = 3$ kVAr, efektivna vrednost napona prijemnika impedanse Z je $U_Z = 100$ V, a taj napon fazno zaostaje za strujom generatora za $\pi/2$. Izračunati (a) efektivnu vrednost struje strujnog generatora i (b) kompleksnu prividnu snagu toga generatora. *(Z930921)*

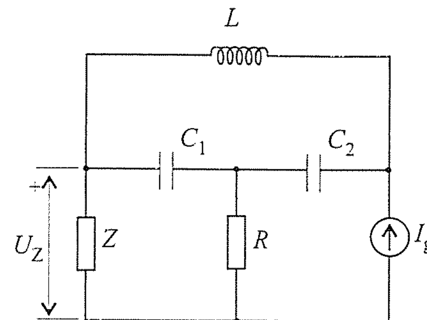
REŠENJE:
(a) Pretpostavimo da je početna faza struje strujnog generatora jednaka nuli ($\underline{I}_g = I_g$). Po teoremi kompenzacije, prijemnik impedanse Z možemo zameniti idealnim naponskim generatorom, kao što je prikazano na slici 201.2. Kompleksna elektromotorna sila toga generatora je

$$\underline{E}_k = \underline{U}_Z = U_Z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2} = -\mathrm{j}\,100\ \mathrm{V} . \tag{201.1}$$

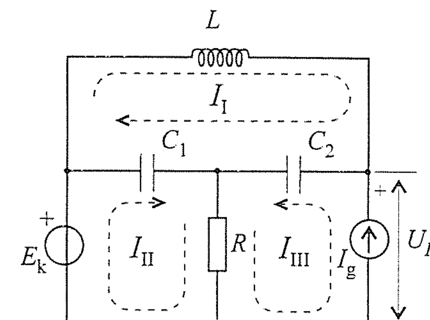
Jednačine po metodi konturnih struja za kolo sa slike 201.2 glase

$$\left(\mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}\right)\underline{I}_{\mathrm{I}} - \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}\underline{I}_{\mathrm{II}} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_2}\underline{I}_{\mathrm{III}} = 0 , \tag{201.2}$$

$$-\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}\underline{I}_{\mathrm{I}} + \left(R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1}\right)\underline{I}_{\mathrm{II}} + R\underline{I}_{\mathrm{III}} = \underline{E}_k ; \tag{201.3}$$



Slika 201.1.



Slika 201.2.

$$\underline{I}_{\mathrm{III}} = \underline{I}_g . \tag{201.4}$$

Sopstvena kompleksna impedansa prve konture je jednaka nuli, pa jednačine (201.2) i (201.4) daju

$$\underline{I}_{\mathrm{II}} = 2\underline{I}_{\mathrm{III}} = 2\underline{I}_g . \tag{201.5}$$

Sada iz jednačine (201.3) dobijamo sledeći izraz za kompleksnu jačinu struje prve konture

$$\underline{I}_{\mathrm{I}} = \mathrm{j}\omega C_1\left[\left(3R + \frac{2}{\mathrm{j}\omega C_1}\right)\underline{I}_g - \underline{E}_k\right] . \tag{201.6}$$

Kako efektivna vrednost ove struje iznosi

$$I_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{Q_L}{\omega L}} = \sqrt{10}\ \mathrm{A} , \tag{201.7}$$

to izjednačavanjem modula leve i desne strane jednačine (201.6) dobijamo kvadratnu jednačinu

$$13I_g^2 - 4I_g - 9 = 0 , \tag{201.8}$$

čije je nenegativno rešenje $I_g = 1$ A.

(b) Iz relacije (201.6) sledi $\underline{I}_{\mathrm{I}} = (1 + \mathrm{j}\,3)$ A, pa je kompleksni napon idealnog strujnog generatora

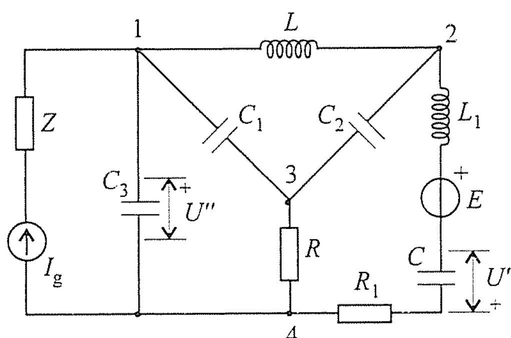
$$\underline{U}_{I_g} = \underline{E}_k - \mathrm{j}\omega L\underline{I}_{\mathrm{I}} = (900 - \mathrm{j}\,400)\ \mathrm{V} . \tag{201.9}$$

Tražena kompleksna prividna snaga generatora iznosi

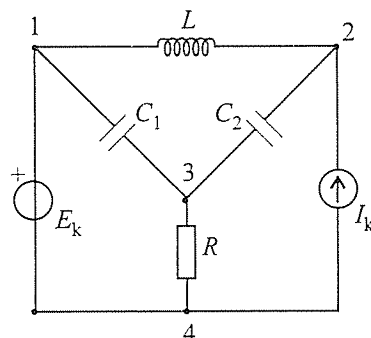
$$\underline{S}_{I_g} = \underline{U}_{I_g}\underline{I}_g^* = (900 - \mathrm{j}\,400)\ \mathrm{VA} . \tag{201.10}$$

Kolika je kompleksna impedansa $\underline{Z}$?
Uočimo da trougao koji čine kalem i kondenzatori u kolu sa slike 201.1 nije moguće transfigurisati u zvezdu, jer je zbir kompleksnih impedansi trougla jednak nuli.

202. Za kolo prostoperiodične struje sa slike 202.1 je $\omega = 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$, $R = 100\ \Omega$, $R_1 = 300\ \Omega$, $L = 300\ \mu\mathrm{H}$, $L_1 = 100\ \mu\mathrm{H}$, $C_1 = 10\ \mathrm{nF}$ i $C_2 = 5\ \mathrm{nF}$. Prividna snaga kalema induktivnosti L je $S_L = 3\ \mathrm{kVAr}$, efektivna vrednost napona kondenzatora kapacitivnosti C_3 je $U'' = 100\ \mathrm{V}$, a naponi U' i U'' su u fazi. Kolika je aktivna snaga koju razvija idealan naponski generator elektromotorne sile E? *(Z950406)*



Slika 202.1.



Slika 202.2.

REŠENJE:
Usvajajući da je početna faza struje kondenzatora kapacitivnosti C, I_{42}, jednaka nuli, imamo da početna faza napona U'' iznosi $-\pi/2$. Primenom teoreme kompenzacije dobijamo kolo prikazano na slici 202.2, gde je

$$\underline{I}_k = \underline{I}_{42} = I_{42} \quad \text{i} \quad \underline{E}_k = \underline{U}'' = -\mathrm{j}U'' . \qquad (202.1)$$

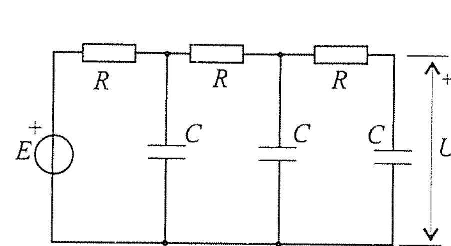
Zadatak dalje rešavamo kao prethodni zadatak i dobijamo da je efektivna vrednost struje kompenzacionog strujnog generatora $I_k = 1\ \mathrm{A}$, te da je kompleksna snaga koju ovaj generator razvija $\underline{S}_{I_k} = (900 - \mathrm{j}\,400)\ \mathrm{VA}$. Tražena aktivna snaga idealnog naponskog generatora elektromotorne sile E je

$$P_E = \mathrm{Re}\{\underline{S}_{I_k}\} + R_1 I_k^2 = 1200\ \mathrm{W} . \qquad (202.2)$$

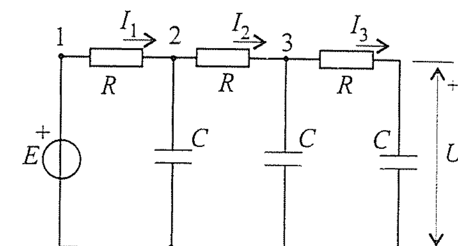
203. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 203.1 poznata je efektivna vrednost elektromotorne sile generatora $E = 10\ \mathrm{V}$, kružna učestanost $\omega = 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$ i kapacitivnost kondenzatora $C = 10\ \mathrm{nF}$. Izračunati otpornost otpornika R tako da napon U bude u protivfazi sa elektromotornom silom generatora. Kolika je tada efektivna vrednost napona U? *(Z891014)*

REŠENJE:
Zadata lestvičasta mreža najlakše se rešava polazeći od napona U. Prema oznakama na slici 203.2, tako imamo, redom,

$$\underline{I}_3 = \mathrm{j}\omega C\underline{U} , \qquad \underline{U}_{30} = \underline{U} + R\underline{I}_3 = (1 + \mathrm{j}\omega RC)\underline{U}$$



Slika 203.1.



Slika 203.2.

$$\text{i} \quad \underline{I}_2 = \mathrm{j}\omega C\underline{U}_{30} + \underline{I}_3 = (2\mathrm{j}\omega C - \omega^2 RC^2)\underline{U} , \qquad (203.1)$$

pa nastavljajući postupak, za kompleksnu elektromotornu silu generatora dobijamo

$$\underline{E} = \underline{U}_{10} = \underline{a}\,\underline{U} , \quad \text{gde je} \quad \underline{a} = 1 + 6\mathrm{j}\omega RC - 5\omega^2R^2C^2 - \mathrm{j}\omega^3R^3C^3 . \qquad (203.2)$$

Da bi napon U i elektromotorna sila E bili u protivfazi, potrebno je da kompleksni koeficijent proporcionalnosti $\underline{a}$ bude čisto realan i negativan. Odavde je

$$6\omega RC - \omega^3R^3C^3 = 0 . \qquad (203.3)$$

Rešenje $R = 0$ ne dolazi u obzir, jer su tada napon U i elektromotorna sila E u fazi ($\underline{a} = 1$). Stoga je

$$\omega^2R^2C^2 = 6 , \qquad (203.4)$$

što daje $R = 245\ \Omega$. Tada je $\underline{a} = -29$, pa efektivna vrednost napona U iznosi

$$U = \frac{E}{29} = 345\ \mathrm{mV} . \qquad (203.5)$$

Kolo predstavlja pomerač faze koji se koristi u nekim oscilatorima.

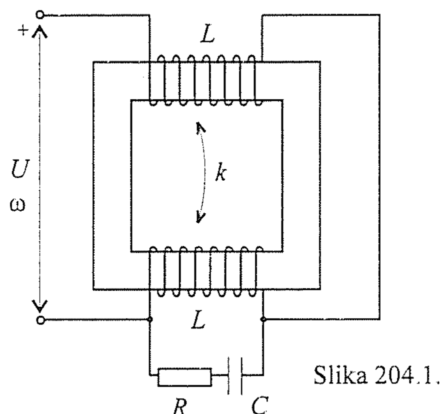
204. Za linearno kolo prostoperiodične struje u ustaljenom režimu prikazano na slici 204.1 je poznato: $R = 10\ \Omega$, $\omega L = 20\ \Omega$, $1/(\omega C) = 10\ \Omega$, $k = 0{,}5$ i srednja snaga otpornika $P_R = 8\ \mathrm{W}$. (a) Kolika je efektivna vrednost U priključenog napona? (b) Koliki je faktor snage celoga kola? *(Z960703)*

REŠENJE:
(a) Na slici 204.2 je prikazana ekvivalentna šema datoga kola. Za referentne smerove struja sa slike, međusobna induktivnost kalemova je negativna, pa je

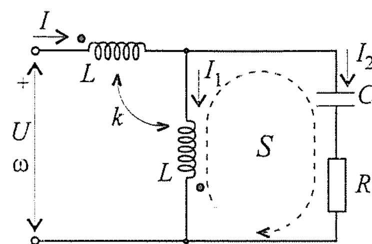
$$\omega L_{12} = -k\omega L = -10\ \Omega . \qquad (204.1)$$

Efektivna vrednost struje otpornika iznosi

$$I_2 = \sqrt{\frac{P_R}{R}} = 0{,}4\sqrt{5}\ \mathrm{A} . \qquad (204.2)$$



Slika 204.1.



Slika 204.2.

Kirhofovi zakoni daju

$$-\underline{I} + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 0 \,, \tag{204.3}$$

$$\mathrm{j}\omega L\underline{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_{12}\underline{I} - \left(R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)\underline{I}_2 = 0 \,, \tag{204.4}$$

odakle, pod pretpostavkom da je početna faza struje I_2 jednaka nuli ($\underline{I}_2 = I_2$), sledi $\underline{I}_1 = -\mathrm{j}I_2$ i $\underline{I} = (1-\mathrm{j})I_2$.

Sada možemo dobiti kompleksni izraz za priključeni napon,

$$\underline{U} = \left(R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\right)\underline{I}_2 + \mathrm{j}\omega L\underline{I} + \mathrm{j}\omega L_{12}\underline{I}_1 = 4\sqrt{5}(2+\mathrm{j}\,1)\ \mathrm{V} \,. \tag{204.5}$$

Efektivna vrednost ovoga napona je $U = 20$ V.

(b) Prividna snaga kola iznosi

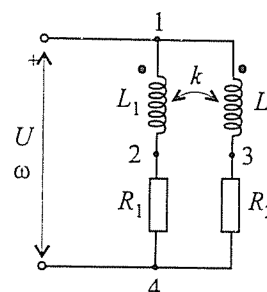
$$S = U|\underline{I}| = 8\sqrt{10}\ \mathrm{VA} \,. \tag{204.6}$$

Kako je otpornik otpornosti R jedini termogeni prijemnik u kolu, to je faktor snage kola

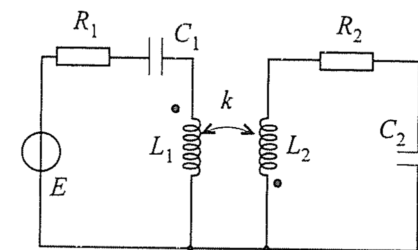
$$\cos\varphi = \frac{P_R}{S} = 0,1\sqrt{10} \,. \tag{204.7}$$

205. Za kolo prostoperiodične struje sa slike 205.1 je poznato: $R_1 = R_2 = 20\ \Omega$, $\omega L_1 = 40\ \Omega$, $\omega L_2 = 60\ \Omega$, $k = \sqrt{2/3}$ i efektivna vrednost napona prvog kalema $U_{12} = \sqrt{130}$ V. Odrediti kompleksne prividne snage kalemova. (*Z950527*)

REZULTAT:
Kompleksne prividne snage koje primaju kalemovi induktivnosti L_1 i L_2 su $\underline{S}_1 = (0,65 + \mathrm{j}\,1,95)$ VA i $\underline{S}_2 = (-0,65 + \mathrm{j}\,1,625)$ VA, respektivno.



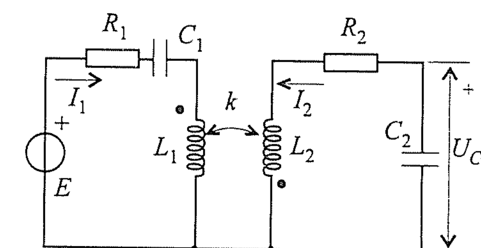
Slika 205.1.



Slika 206.1.

206. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 206.1 poznata je efektivna vrednost elektromotorne sile generatora $E = 100\ \mu$V, učestanost $f = 20$ MHz, otpornosti $R_1 = 50\ \Omega$ i $R_2 = 20\ \Omega$, induktivnosti $L_1 = 6\ \mu$H i $L_2 = 20\ \mu$H, koeficijent induktivne sprege $k = 0,2$ i kapacitivnost $C_1 = 10$ pF. Odrediti kapacitivnost kondenzatora C_2 tako da efektivna vrednost napona ovog kondenzatora bude najveća moguća. Kolika je ta efektivna vrednost? (*Z890926*)

REŠENJE:
Usvajajući referentne smerove elektromotorne sile generatora i struja kao na slici 206.2, jednačine za data spregnuta kola glase



Slika 206.2.

$$\underline{z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{z}_{12}\underline{I}_2 = \underline{E} \,, \tag{206.1}$$

$$\underline{z}_{12}\underline{I}_1 + \left(\underline{z}_{22} + \frac{1}{\mathrm{j}B_2}\right)\underline{I}_2 = 0 \,, \tag{206.2}$$

gde je $\underline{z}_{11} = R_1 + \mathrm{j}\omega L_1 - \mathrm{j}/(\omega C_1) = (50 - \mathrm{j}\,41,8)\ \Omega$, $\underline{z}_{12} = -\mathrm{j}\omega L_{12} = -\mathrm{j}\omega k\sqrt{L_1 L_2} = -\mathrm{j}\,275,3\ \Omega$, $\underline{z}_{22} = R_2 + \mathrm{j}\omega L_2 = (20 + \mathrm{j}\,2513,3)\ \Omega$ i $B_2 = \omega C_2$ ($\omega = 2\pi f$). Odavde je

$$\underline{I}_2 = \frac{-\underline{z}_{12}\underline{E}}{\underline{z}_{11}(\underline{z}_{22} - \mathrm{j}/B_2) - \underline{z}_{12}^2} \,. \tag{206.3}$$

Pod pretpostavkom da je početna faza elektromotorne sile generatora jednaka nuli, kompleksni napon kondenzatora kapacitivnosti C_2 je, za date brojne vrednosti,

$$\underline{U}_{C_2} = \frac{\mathrm{j}\underline{I}_2}{B_2} = \frac{270,9 - \mathrm{j}\,324,2}{1 - 3259,3B_2 + \mathrm{j}\,912,5B_2}\ \mu\mathrm{V} \tag{206.4}$$

(B_2 u S). Efektivna vrednost ovoga napona data je izrazom

$$U_{C_2} = \frac{422,5}{|1 - 3259,3B_2 + \mathrm{j}\,912,5B_2|}\ \mu\mathrm{V} \,. \tag{206.5}$$

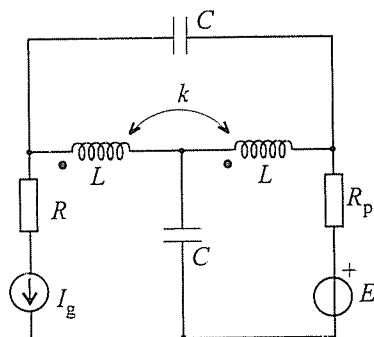
Kvadrat imenioca gornjeg razlomka predstavlja kvadratnu funkciju

$$F(B_2) = 1145,5 \cdot 10^4 B_2^2 - 6518,6\,B_2 + 1\,, \qquad (206.6)$$

koja ima minimum kada je $B_2 = 284,5\ \mu$S, odnosno $C_2 = 2,26$ pF. Minimumu funkcije F odgovara maksimum efektivne vrednosti napona U_{C_2}, koji iznosi $(U_{C_2})_{\max} = 1,57$ mV.

Kolo sa slike 206.1 predstavlja ulazno kolo radio prijemnika.

207. U kolu prostoperiodične struje prikazanom na slici 207.1 je $E = 2$ V, $\theta_E = 3\pi/4$, $\omega = 10^7\ \mathrm{s}^{-1}$, $I_g = 30$ mA, $\psi_g = -\pi/4$, $L = 10\ \mu$H, $k = 1$, $C = 1$ nF i $R = 10\ \Omega$. (a) Kolika treba da bude otpornost prijemnika R_p da bi srednja snaga toga prijemnika bila maksimalna? (b) Kolika je ta maksimalna snaga? (*Z960618*)



Slika 207.1.

REŠENJE:

(a) U odnosu na granu sa prijemnikom otpornosti R_p i idealnim naponskim generatorom, ostatak kola, prikazan na slici 207.2, možemo zameniti Tevenenovim generatorom, kao na slici 207.3. Imajući u vidu Kirhofove zakone, za kolo sa slike 207.2 možemo pisati

$$\underline{I}_1' + \underline{I}_2' - \underline{I}_g = 0\,, \qquad (207.1)$$

$$\underline{Z}_L \underline{I}_2' + \underline{Z}_{L_{12}} \underline{I}_1' - \underline{Z}_L \underline{I}_1' - \underline{Z}_{L_{12}} \underline{I}_2' - \underline{Z}_C \underline{I}_1' = 0\,, \qquad (207.2)$$

gde je $\underline{I}_g = I_g e^{j\psi_g} = 15\sqrt{2}(1-j)$ mA, $\underline{Z}_L = j\omega L = j\,100\ \Omega$, $\underline{Z}_{L_{12}} = -j\omega k L = -j\,100\ \Omega$ i $\underline{Z}_C = 1/(j\omega C) = -j\,100\ \Omega$. Rešenje jednačina (207.1) i (207.2) glasi: $\underline{I}_1' = 10\sqrt{2}(1-j)$ mA i $\underline{I}_2' = 5\sqrt{2}(1-j)$ mA. Računajući kompleksni napon između priključaka 1 i 2 na slici 207.2, za kompleksnu elektoromotornu silu Tevenenovog generatora dobijamo

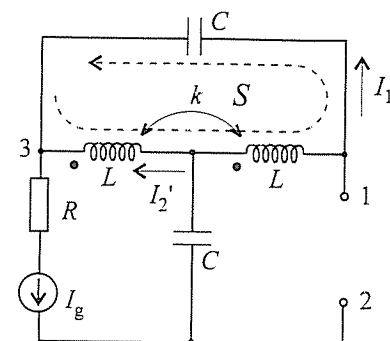
$$\underline{E}_T = \underline{U}_{12}' = -\underline{Z}_C \underline{I}_g - \underline{Z}_L \underline{I}_1' - \underline{Z}_{L_{12}} \underline{I}_2' = \sqrt{2}(1+j)\ \mathrm{V}\,. \qquad (207.3)$$

Unutrašnja kompleksna impedansa Tevenenovog generatora je, zbog simetrije, jednaka kompleksnoj impedansi koju "vidi" grana sa strujnim generatorom u kolu sa slike 207.2, pa imamo

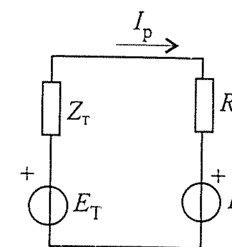
$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_{e23}' = \frac{\underline{U}_{23}'}{\underline{I}_g} = \frac{\underline{Z}_C \underline{I}_1' - \underline{U}_{12}'}{\underline{I}_g} = -j\frac{400}{3}\ \Omega\,. \qquad (207.4)$$

Prema uslovu prilagođenja po snazi čisto rezistivnog prijemnika (138.5), srednja snaga prijemnika na slici 207.3 je maksimalna kada je

$$R_p = |\underline{Z}_T| = \frac{400}{3}\ \Omega\,. \qquad (207.5)$$



Slika 207.2.



Slika 207.3.

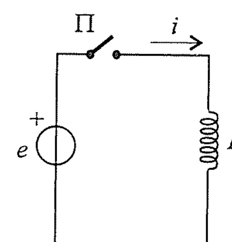
(b) Kompleksna jačina struje prilagođenog prijemnika iznosi (slika 207.3)

$$\underline{I}_p = \frac{\underline{E}_T - \underline{E}}{\underline{Z}_T + R_p} = 7,5\sqrt{2}(1+j)\ \mathrm{mA}\,, \qquad (207.6)$$

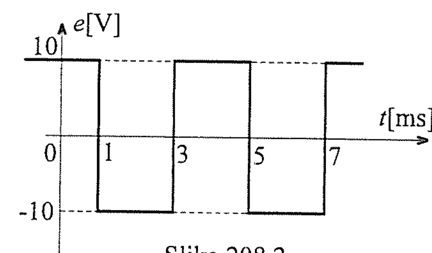
gde je $\underline{E} = E e^{j\theta_E} = \sqrt{2}(-1+j)$ V. Stoga je maksimalna srednja snaga prijemnika

$$(P_p)_{\max} = R_p |\underline{I}_p|^2 = 30\ \mathrm{mW}\,. \qquad (207.7)$$

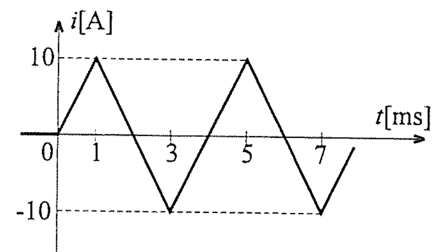
208. Kalem induktivnosti $L = 1$ mH, idealan naponski generator i prekidač Π vezani su kao na slici 208.1. Elektromotorna sila generatora je prikazana na slici 208.2. Prekidač Π se zatvara u trenutku $t = 0$. Skicirati zavisnost jačine struje kalema od vremena i izračunati njenu amplitudu. (*P940407*)



Slika 208.1.



Slika 208.2.



Slika 208.3.

REŠENJE:
Pre zatvaranja prekidača Π (za $t<0$), jačina struje kalema, $i(t)$, jednaka je nuli. Nakon zatvaranja prekidača, imamo

$$i(t)=i(0^+)+\frac{1}{L}\int_{0+}^{t} e(t')\,dt', \quad t>0, \tag{208.1}$$

gde je $i(0^+)=i(0^-)=0$ (jačina struje kalema se ne može trenutno promeniti). Na osnovu relacije (208.1) i slike 208.2 skicirana je funkcija $i(t)$ – slika 208.3. Amplituda struje kalema je $I_m = 10$ A.

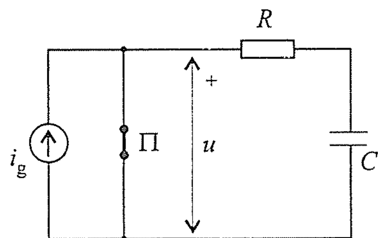
209. U kolu prikazanom na slici 208.1 je $e(t)=E_m\cos(\omega t+\theta)$, gde je $E_m=100$ V, $\omega=1000\ \text{s}^{-1}$ i $\theta=-\pi/2$, i $L=1$ mH. Prekidač Π se zatvara u trenutku $t=0$. Kolika je maksimalna, a kolika minimalna trenutna jačina struje kalema za $t>0$? (*P950903*)

REŠENJE:
Koristeći se relacijom (208.1), za jačinu struje kalema nakon zatvaranja prekidača Π dobijamo

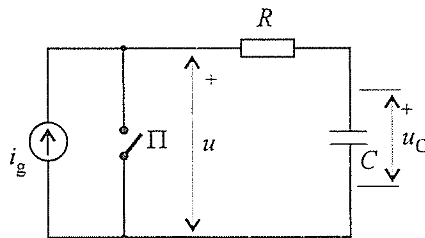
$$i(t)=\frac{E_m}{\omega L}(1-\cos\omega t), \quad t>0, \tag{209.1}$$

pa je minimalna trenutna jačina struje $i_{min}=0$, a maksimalna $i_{max}=2E_m/(\omega L)=200$ A.

210. U kolu prikazanom na slici 210.1 je $i_g(t)=0,2\sin\omega t$ A, $\omega=10^4\ \text{s}^{-1}$, $R=100\ \Omega$ i $C=1\ \mu$F. Prekidač Π je zatvoren za $t<0$, a otvoren za $t>0$. Odrediti analitičke izraze za napon $u(t)$ za $t<0$ i $t>0$. (*P950924*)



Slika 210.1.



Slika 210.2.

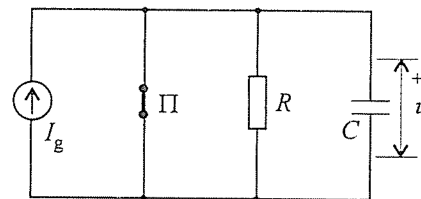
REŠENJE:
Za $t<0$ je $u(t)=0$. Nakon otvaranja prekidača Π, imamo (slika 210.2)

$$u(t)=u_C(t)+Ri_g(t)=u_C(0^+)+\frac{1}{C}\int_{0+}^{t} i_g(t')\,dt'+Ri_g(t)=$$

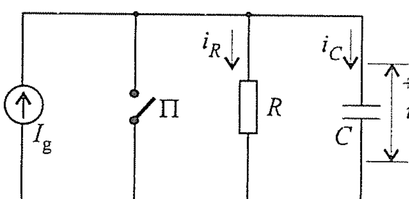
$$20\left[1-\sqrt{2}\cos\left(10^4t+\frac{\pi}{4}\right)\right]\ \text{V}, \quad t>0 \tag{210.1}$$

(t u s), gde je $u_C(0^+)=u_C(0^-)=0$ (kondenzator je u trenutku $t=0^-$ sigurno neopterećen, a njegov napon se ne može trenutno promeniti).

211. U kolu prikazanom na slici 211.1 poznato je: $I_g=1$ mA (stalna struja), $R=1\ \text{k}\Omega$ i $C=100\ \mu$F. Prekidač Π je zatvoren do trenutka $t=0$, a onda se otvara. (a) Izvesti diferencijalnu jednačinu za napon $u(t)$ (za $t>0$). (b) Rešiti ovu jednačinu. (c) Skicirati napon $u(t)$. (*P940616*)



Slika 211.1.



Slika 211.2.

REŠENJE:
(a) Do trenutka $t=0$ je $u(t)=0$ i taj napon se ne može skokovito promeniti. Za $t>0$, prvi Kirhofov zakon daje (slika 211.2)

$$i_R(t)+i_C(t)=I_g, \tag{211.1}$$

gde je $i_R(t)=u(t)/R$, a jačina struje $i_C(t)$ je data izrazom (101.1). Stoga tražena diferencijalna jednačina glasi

$$\frac{du(t)}{dt}+\frac{1}{RC}u(t)=\frac{I_g}{C}. \tag{211.2}$$

(b) Rešenje odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine (rešenje kada je ek-sitacija I_g anulirana – tzv. sopstveni odziv kola) je

$$u_h(t)=U_0\,e^{-t/\tau}, \tag{211.3}$$

gde je U_0 proizvoljna konstanta, a $\tau=RC=0,1$ s vremenska konstanta kola.

Kako partikularno rešenje jednačine (211.2) (rešenje u stacionarnom stanju, kada je $du/dt=0$) glasi

$$u_p(t)=RI_g, \tag{211.4}$$

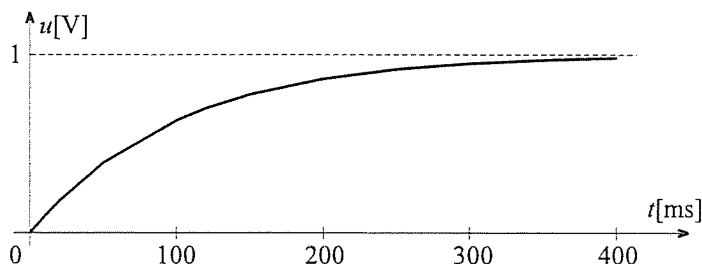
to je opšte rešenje ove jednačine

$$u(t)=u_h(t)+u_p(t)=U_0\,e^{-t/\tau}+RI_g. \tag{211.5}$$

Konačno, iz početnog uslova $u(0^+) = 0$ sledi $U_0 = -RI_g$, pa imamo

$$u(t) = RI_g\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \left(1 - e^{-10t}\right)\ \mathrm{V}\,. \tag{211.6}$$

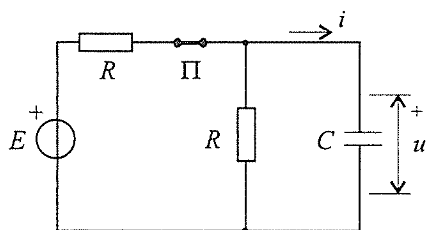
(c) Napon $u(t)$ je skiciran na slici 211.3.



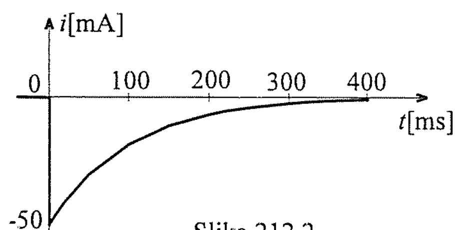
Slika 211.3.

Preporučuje se čitaocu da odredi napon i struju kondenzatora nakon što se u trenutku $t = 0,3$ s prekidač Π u kolu sa slike 211.2 ponovo zatvori. Kolika je struja kondenzatora u trenutku $t = 0,3$ s?

212. U kolu sa slike 212.1 je $E = 10$ V (stalna elektromotorna sila), $R = 100\ \Omega$ i $C = 1$ mF. Prekidač Π je zatvoren i u kolu je uspostavljeno stacionarno stanje. U trenutku $t = 0$ prekidač se otvara. (a) Izvesti diferencijalnu jednačinu za napon $u(t)$ za $t > 0$. (b) Rešiti tu jednačinu. (c) Skicirati jačinu struje $i(t)$. (*P960925*)



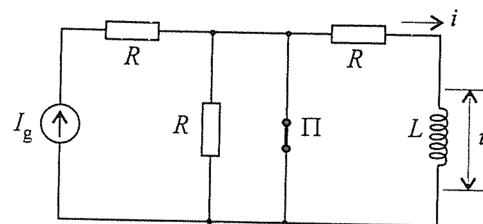
Slika 212.1.



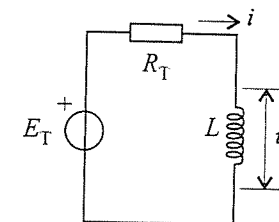
Slika 212.2.

REZULTAT:
(a) U stacionarnom stanju za $t < 0$, kondenzator predstavlja otvorenu vezu, pa je $u(t) = E/2 = 5$ V. Za $t > 0$, diferencijalna jednačina za napon kondenzatora glasi $\mathrm{d}u(t)/\mathrm{d}t + u(t)/\tau = 0$, uz početni uslov $u(0^+) = 5$ V, gde je $\tau = RC = 100$ ms. (b) Rešenje je $u(t) = 5\,e^{-t/\tau}$ V, $t > 0$. (c) Zavisnost jačine struje kondenzatora od vremena je skicirana na slici 212.2.

213. U kolu prikazanom na slici 213.1 je $I_g = 10$ mA (stalna struja), $R = 100\ \Omega$ i $L = 1$ mH. Prekidač Π je zatvoren i u kolu je uspostavljeno stacionarno stanje. U trenutku $t = 0$ prekidač se otvara. (a) Izvesti diferencijalnu jednačinu za struju $i(t)$ za $t > 0$. (b) Rešiti ovu jednačinu. (c) Skicirati napon $u(t)$. (*P960904*)



Slika 213.1.



Slika 213.2.

REŠENJE:
(a) U stacionarnom stanju kada je prekidač Π zatvoren, struja strujnog generatora se zatvara kroz kratak spoj, pa je jačina struje kalema $i(t) = 0$ za $t < 0$. Kada se prekidač otvori, strujni generator i tri otpornika možemo zameniti ekvivalentnim Tevenenovim generatorom, parametara

$$E_T = RI_g = 1\ \mathrm{V} \quad \text{i} \quad R_T = 2R = 200\ \Omega\,. \tag{213.1}$$

Ovaj generator i kalem čine prosto kolo prikazano na slici 213.2, za koje je

$$u(t) + R_T\, i(t) = E_T\,, \tag{213.2}$$

pri čemu je napon $u(t)$ dat izrazom (102.1). Odavde dobijamo sledeću diferencijalnu jednačinu za jačinu struje $i(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{R_T}{L}\, i(t) = \frac{E_T}{L}\,. \tag{213.3}$$

Jačina struje kalema se ne može trenutno promeniti, pa je $i(0^+) = 0$ (početni uslov).

(b) Opšte rešenje jednačine (213.3) glasi

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t)\,, \tag{213.4}$$

gde je rešenje homogene jednačine

$$i_h(t) = I_0\, e^{-t/\tau}\,, \qquad \tau = \frac{L}{R_T} = 5\ \mu\mathrm{s}\,, \tag{213.5}$$

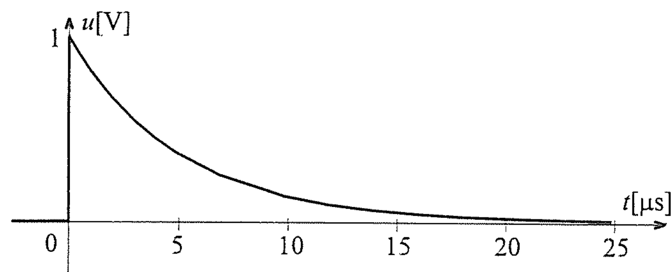
dok je partikularno rešenje

$$i_p(t) = \frac{E_T}{R_T} = 5\ \mathrm{mA}\,. \tag{213.6}$$

Na osnovu početnog uslova za $i(0^+)$ dobijamo $I_0 = -5$ mA, pa imamo

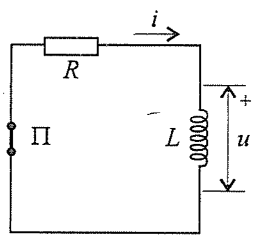
$$i(t) = 5\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \text{ mA} . \tag{213.7}$$

(c) Napon kalema je jednak nuli pre otvaranja prekidača Π, dok je $u(t) = e^{-t/\tau}$ V za $t > 0$. Ovaj napon je skiciran na slici 213.3.

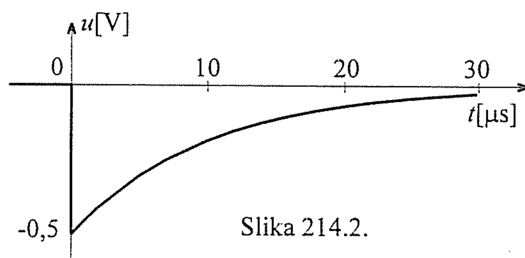


Slika 213.3.

214. Ponoviti prethodni zadatak za slučaj kada je za $t < 0$ prekidač otvoren, a za $t > 0$ zatvoren. (*P960613*)



Slika 214.1.



Slika 214.2.

REŠENJE:
(a) U stacionarnom stanju pre zatvaranja prekidača Π, kalem predstavlja kratak spoj, pa je jačina struje kroz taj spoj $i(t) = I_g/2 = 5$ mA ($t < 0$). Kada se prekidač zatvori, deo kola levo od prekidača se kratko spaja, tako da je za analizu prelaznog režima dovoljno posmatrati prosto kolo prikazano na slici 214.1. Polazeći od drugog Kirhofovog zakona, za diferencijalnu jednačinu za struju ovoga kola dobijamo

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = 0 , \quad t > 0 , \tag{214.1}$$

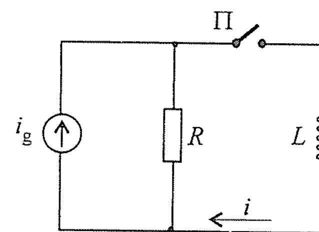
uz početni uslov $i(0^+) = 5$ mA.

(b) Opšte rešenje gornje jednačine je

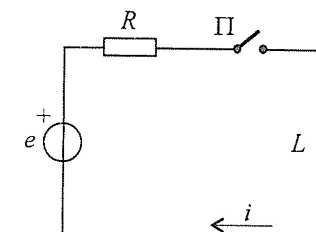
$$i(t) = i(0^+)\, e^{-t/\tau} = 5\, e^{-t/\tau} \text{ mA} \quad (t > 0) , \qquad \tau = \frac{L}{R} = 10\ \mu s . \tag{214.2}$$

(c) Napon kalema je skiciran na slici 214.2.

215. U kolu prikazanom na slici 215.1 je $R = 1$ kΩ i $L = 1$ mH. Jačina struje strujnog generatora je prostoperiodična, $i_g(t) = 10\cos\omega t$ mA, gde je $\omega = 10^6$ s^{-1}. Prekidač Π se zatvara u trenutku $t = 0$. Izvesti diferencijalnu jednačinu za struju $i(t)$ za $t > 0$. Rešiti ovu jednačinu. (*P950904*)



Slika 215.1.



Slika 215.2.

REŠENJE:
Transfiguracijom realnog strujnog u realan naponski generator, dobijamo ekvivalentno kolo prikazano na slici 215.2, gde je

$$e(t) = Ri_g(t) = 10\cos\omega t \text{ V} . \tag{215.1}$$

Analiza prelaznog režima u ovome kolu je ista kao za kolo sa slike 213.2, samo je, s obzirom na različitu eksitaciju (prostoperiodična umesto stalne elektromotorne sile), različito partikularno rešenje diferencijalne jednačine. Ono predstavlja jačinu struje u kolu kada se uspostavi ustaljen prostoperiodični režim, pa glasi

$$i_p(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}\right) = 5\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ mA} , \tag{215.2}$$

gde je $E_m = 10$ V amplituda elektromotorne sile $e(t)$. Opšte rešenje za struju kalema je

$$i(t) = I_0\, e^{-t/\tau} + 5\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \text{ mA} , \qquad \tau = \frac{L}{R} = 1\ \mu s . \tag{215.3}$$

Iz početnog uslova

$$i(0^+) = I_0 + 5 \text{ mA} = i(0^-) = 0 \tag{215.4}$$

sledi $I_0 = -5$ mA, pa je

$$i(t) = 5\left[\sqrt{2}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) - e^{-t/\tau}\right] \text{ mA} . \tag{215.5}$$

LITERATURA

1. Ranojević M. N.: "Osnovi elektrotehnike", Građevinska knjiga, Beograd, 1964.

2. Ranojević M. N.: "Naizmenične struje", Građevinska knjiga, Beograd, 1961.

3. Ranojević M. N.: "Zbirka zadataka iz Osnova elektrotehnike", Građevinska knjiga, Beograd, 1969.

4. Surutka J. V.: "Osnovi elektrotehnike - Elektrostatika, Stalne jednosmerne struje", Naučna knjiga, Beograd, 1978.

5. Surutka J. V.: "Osnovi elektrotehnike - Elektromagnetizam", Naučna knjiga, Beograd, 1978.

6. Popović B. D.: "Osnovi elektrotehnike I", Građevinska knjiga, Beograd, 1976.

7. Popović B. D.: "Osnovi elektrotehnike II", Građevinska knjiga, Beograd, 1978.

8. Popović B. D. i Đorđević A. R.: "Osnovi elektrotehnike III", Građevinska knjiga, Beograd, 1979.

9. Božilović H. A., Spasojević Ž. A. i Božilović G. N.: "Zbirka zadataka iz Osnova elektrotehnike - Elektrostatika, Stalne jednosmerne struje", Naučna knjiga, Beograd, 1983.

10. Božilović H. A., Spasojević Ž. A. i Božilović G. N.: "Zbirka zadataka iz Osnova elektrotehnike - Elektromagnetizam, Naizmenične struje", Naučna knjiga, Beograd, 1983.

11. Božilović G. N.: "Zadaci iz Osnova elektrotehnike", Naučna knjiga, Beograd, 1982.

12. Stojić R. M.: "Priručnik za laboratorijske vežbe iz Osnova elektrotehnike", Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1981.

13. Đorđević A. R., Božilović G. N. i Notaroš B. M.: "Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Osnova elektrotehnike - I deo", Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1997.

Izdavač

AKADEMSKA MISAO

Bul. kralja Aleksandra 73, Beograd
tel./fax: (+381 11) 3218 354

office@akademska-misao.co.yu

www.akademska-misao.co.yu

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

CIP

621.3.011.025(075.8)(076)
537.612(075.8)(076)
537.85(075.8)(076)

ЂОРЂЕВИЋ, Антоније Р.
Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz osnova elektrotehnike. Deo 2 / Antonije R. Đorđević, Gradimir N. Božilović, Branislav M. Notaroš. - 3. izd. - Beograd : Akademska misao, 2007 (Beograd : Planeta print). - 164 str. : graf. prikazi ; 24 cm

Tiraž 500. - Bibliografija: str. 164. - Sadržaj s nasl. str. : Stalno magnetsko polje i elektromagnetska indukcija ; Naizmenične struje.

ISBN 978-86-7466-271-7
1. Божиловић, Градимир Н. 2. Нотарош, Бранислав М.
a) Магнетско поље - Задаци b) Електромагнетска индукција - Задаци c) Електрична кола - Задаци
COBISS.SR-ID 143611660